Tom. 14

20.

DISSERTATIO MATHEMATICA
EXHIBENS
GEOMETRIÆ
ELEMENTA,
ALGEBRAICE,
Ubi opus,
EVOLUTA,
Quam

PRÆSIDE

DN. BERNHARDO ALBINO,

PHILOS. ET MED. DOCT. hujusque PROF. ORD. CELEBERRIMO atq; h. t. DECANO,

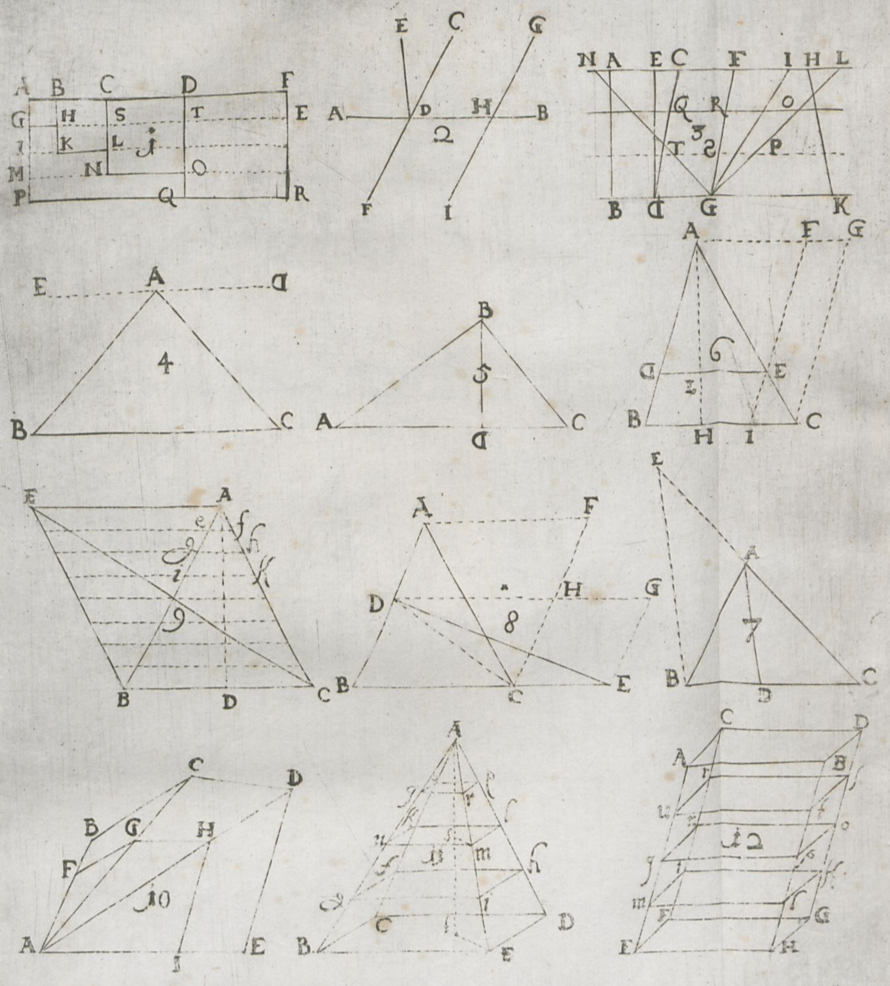
PATRONO & PRÆCEPTORE SUO JUGITER OBSERVANDO,

D. V. SEPTEMB. ANNI 1685.

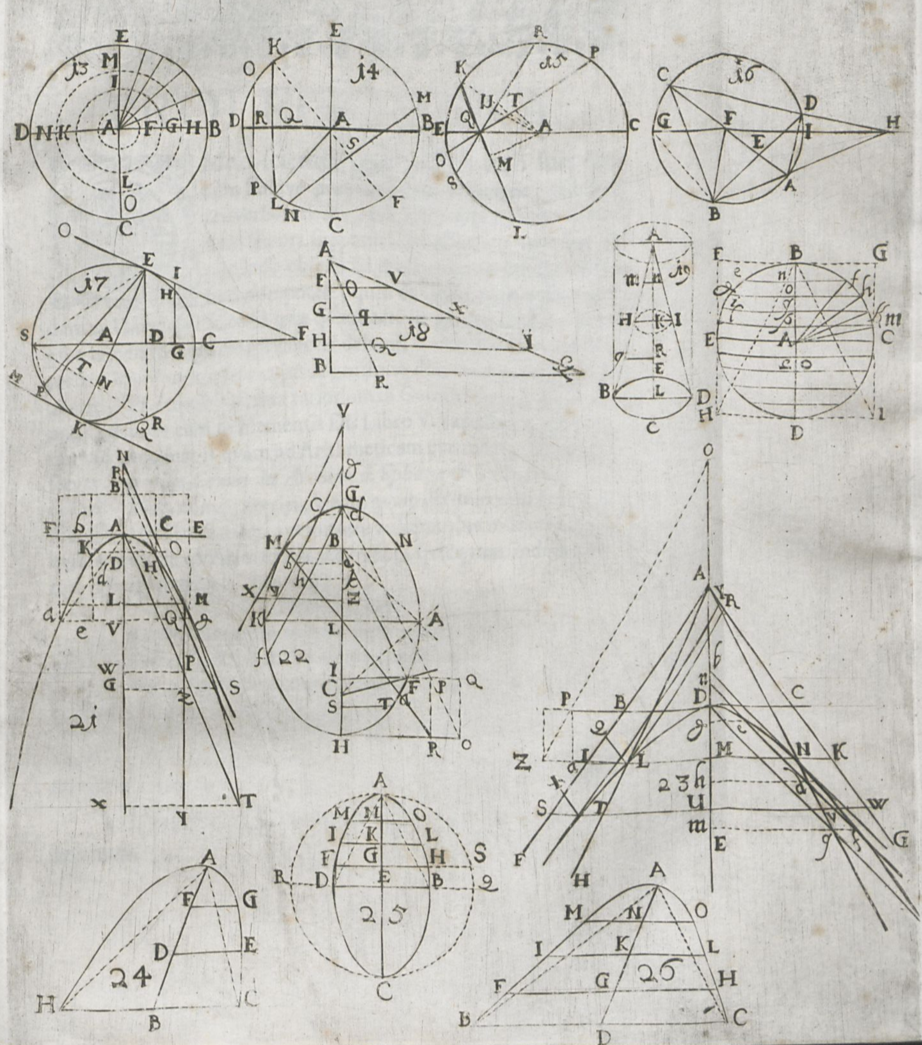
Publicè discutiendam offert

AUCTOR
OTTO HOMFELD,
Bremensis.

Francof. ad Oderam,
Typis CRHISTOPHORI ZEITLERI.



Carl. Sluht Sculpsit.


13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26

PROLEGOMENA.

OMnis scientia particularis non suis tantùm sibiqve propriis utitur principiis; sed & ex universaliori illa, cui subjicitur, multa identidem seu præsupponit, seu assumit; qvæ suis applicando objecti sui tractationem absolvit. Hinc fieri non potest, quin & Geometria nostra qvædam ex Universali scientia qvæ qvantitatē in genere tractat assumat, qvæ tamen illi non magis misceri debent, qvàm Poeticæ aut Oratoriæ Grammatica sine cujus cognitione illarum neutra cognosci potest. Præcipuè doctrina rationum in Geometria magni est usus, unde Euclides eam in Elementis suis Libro V. exposuit, qvanqvam non ad hanc magis qvàm ad Arithmeticam pertineat, uti bene observat *Sturmius*, *Comm. in Archim. d. Sphæra & Cylindr. l. 2. propos. 16.* Nos, cùm præteriri ob eam qvam diximus rationem potuisset, illam toti tractationi præmittere voluimus, ne in seqventibus, in qvibus subinde qvædam ex illa recurrent, qvicqvam indemonstratum relinqveremus. Sint ergo

Definitiones.

1. *Ratio* est duarum qvantitatum ejusdem generis respectus, qvo una alteram continet aut ab illa continetur.

2. Eæ qvantitates dicuntur termini, qvorum qvi cum altero confertur *Antecedens* dicitur, reliqvus *Conseqvens*.

3. Qvod si Antecedens est Consequenti æqvalis, dicitur inter eos esse *ratio æqvalitatis*: Si verò Antecedens major dicitur inter eos esse *ratio majoris inæqvalitatis*: & si minor, *minoris*.

4. *In eadem ratione* dicuntur a ad b & c ad d, cum $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ æqvantur.

5. Si verò $\frac{a}{b}$ majus est qvàm $\frac{c}{d}$: *a* ad *b majorem* habere *rationem* dicitur, qvàm *c* ad *d*: & si $\frac{a}{b}$ qvàm $\frac{c}{d}$ minus; *minorem*.

6. Eandem habentes rationem *proportionales* dicuntur; & ipsa rationum similitudo *proportio*.

7. *Proportionem continuam* habere dicuntur qvantitates, cùm ratio primæ ad secundam, secundæ ad tertiam, tertiæ ad qvartam &c. est eadem.

THEOREMATA.

Eucl. 11. V. I. Qvæ eidem sunt eædem rationes, sunt inter se eædem.

Sit uti a *ad* b *sic* c *ad* d: *& uti* a *ad* b; *ita* e *ad* f: *dico fore, ut* c *ad* d: *sic* e ad f.

α. def. 4. h. *Qvoniam enim* (α) $\frac{a}{b} \infty \frac{c}{d}$ & $\frac{a}{b} \infty \frac{e}{f}$: *erit qvoqve* $\frac{c}{d} \infty \frac{e}{f}$ *h. e.* c *ad* d: *uti* e *ad* f. Q. E. D.

II. Qvatuor proportionalium productum extremorum æqvatur producto ex mediis. Et vice versa: Si datis qvatuor terminis, productum extremorum æqvatur facto ex mediis hi qvatuor erunt proportionales.

E. 16. VI. 19 VII. 34. XI. 9. 15. XII.

1. *Sint proportionales uti* a *ad* ax *ita* b *ad* bx

Erit abx ∞ bax. Q. E. D.

2. *Sint dati* a. b. c. d.

sitqve productum extremorum, ad, *æquale facto ex mediis*, bc; *dico* a *esse ad* b: *uti* c *ad* d.

Cum enim ad ∞ bc *Erit factâ divisione per* bd &:

$\frac{a}{b} \infty \frac{c}{d}$ Q. E. D.

Coroll.

E. 17. VI. 20. VII. Ergo si continuè proportionalium sint tres termini erit productum extremorum æqvale qvadrato medii.

III. Proportionales qvatuor (uti *a* ad *ax* ita *b* ad *bx*) proportionales qvoqve sunt

1. Inversè *uti* ax *ad* a. *sic* bx *ad* b

Est n. bax ꝏ abx. *productum extremorum* ꝏ *producto mediorum. Unde* (β) *patet propositum.* (β) II. h.

2. Vicissim seu permutando : *uti* a *ad* b : *sic* ax *ad* bx. *sunt enim extremi* $\frac{a}{bx}$ *Medii* $\frac{b}{ax}$ E. 15. 16. V. 9. 10. 13. VII

Et abx ꝏ bax.

Ergo (β) *patet propositum*

3. Componendo : *uti* a + ax *ad* a : *sic* b + bx *ad* b. E. 18. V.

Sunt enim extremi $\frac{a+ax}{b}$ *Medii* $\frac{b+bx}{a}$

Et ab + abx ꝏ ab + abx. *Ergo* (β.)

4. Dividendo : *uti* a - ax *ad* a : *ita* b - bx *ad* b. E. 17. V.

Qvia extremi $\frac{a-ax}{b}$ *Medii* $\frac{a}{b-bx}$

Erit ab - abx ꝏ ab - abx. *Ergo* (β)

5. Congregando : *uti* a *ad* ax : *Sic* a + b *ad* ax + bx. E. 1. 12. V. 5. 6. 12. VII.

Sunt enim extremi $\frac{a}{ax+bx}$ *Medii* $\frac{ax}{a+b}$

aax + abx. ꝏ aax + abx. *Ergo*. (β)

IV. Si fuerit, ut totum ad totum : sic pars ad partem ; erit etiam ut totum ad totum : sic reliqvum ad reliqvum. E. 5. 19. V. 7. 8. VII.

Sit ax *ad* bx : *ut* a *ad* b.

dico fore : ax - a *ad* bx - b : *uti* ax *ad* bx.

Sunt enim extremi $\frac{ax-a}{bx}$ *medii* $\frac{bx-b}{ax}$

abxx - abx ꝏ abxx - abx. *Ergo* (β) β. II. h.

V. Si fuerit in ordinata proportione E. 3. 20. 22. V. 14. VII.

uti *a* ad *ax* — uti *ax* ad *ayx*
sic *b* ad *bx* nec non sic *bx* ad *byx*

Erit etiam mediis intermissis

uti *a* ad *ayx* : ita *b* ad *byx*.

Sunt enim extremi : $\frac{a}{byx}$ *medii* $\frac{b}{ayx}$

abyx ꝏ abyx. *Ergo* (β)

E.21.23.V. VI. Idem est in proportione perturbata.

Sint enim quantitates: ayx. ay. a.
byyx. byx. by.

ubi sint perturbatim:

ayx *ad* ay : *uti* byx *ad* by.

& rursus ay *ad* a : *uti* byyx *ad* byx.

Erunt etiam mediis intermissis ex æquo

ayx *ad* a: *uti* byyx *ad* by.

E.15.V. *Quoniam extremi* $\frac{ayx}{by}$ *medii* $\frac{byyx}{a}$

$abyyx \infty abyyx$ *Ergo* (β)

VII. Si inter duas datas qvantitates qvaslibet, *a*, & *b*, interponantur aliæ qvotcunqve *c*, *d*, *e*, *f*, &c. erit ratio primæ datæ ad alteram datam composita ex ratione primæ ad secundam, $\frac{a}{c}$, & secundæ ad tertiam $\frac{c}{d}$, & tertiæ ad qvartam $\frac{d}{f}$ & qvartæ ad ultimam $\frac{f}{b}$
E.17.V.

Patet enim $\frac{a}{b}$ *esse* $\infty \frac{acdf}{cdfb}$ Q. E. D.

Coroll.

E. Def. 10. V. Hinc continuè proportionalium si sint tres termini, habebit primus ad tertium duplicatam rationem ejus, qvam habet primus ad secundum, hoc est compositam ex ratione primi ad secundam bis sumta, seu ut planiùs loqvamur, rationem qvam habet qvadratum primi ad qvadratum secundi.

Sint continuè proportionales a, b, c: *dico*; a *esse ad* c: *uti* aa *ad* bb: *seu* $\frac{a}{c} \infty \frac{aa}{bb}$

γ.def.4.h. δ. VII. h. *Quia enim* (γ) $\frac{a}{b} \infty \frac{b}{c}$ nec non (δ) $\frac{a}{c} \infty \frac{ab}{bc}$

erit $\frac{a}{c} \infty \frac{aa}{bb}$ Q. E. D.

Eadem ratione patet si termini sint qvatuor, fore primum ad ultimum in triplicata ratione primi ad secundum; si qvinqve, in quadruplicata & sic in infinitum.

Atqve sic breviter totam doctrinam rationum exhibuimus atqve nulla fere opera ostendimus, qvæ Euclides ejusqve Commentatores operosis demonstrationibus probare solent. Possent qvidem his plura subnecti eorum qvæ non minùs ad omnem qvantitatis speciem pertinent, atqve illa, qvæ de rationibus hic attigimus: qvalia sunt, qvæ Euclides in plerisqve libri secundi Theorematibus de Toto & partibus proponit, qvanqvam ea, uti dixi, non ad lineas magis, ad qvas ab Euclide restringuntur, qvam ad omne qvantum spectent. Verùm noluimus diutiùs in limine hærere: præterqvam enim qvod ea vix ad seqventium demonstrationem qvicqvam conferant, inventio eorum tam facilis atqve exposita est, ut nec tironem Analyseos fallere possit.

Duæ tamen supersunt regulæ, qvæ in seqventibus occurrent, vulgatæ illæ qvidem, sed ostendendæ tamen ne qvid lectoribus moram faciat.

Prior harum invenire docet summam qvantitatum Arithmeticè proportionalium; sc.

Si sint qvotcunqve qvantitates æqvali intervallo progredientes, summam maximæ & minimæ, ductam in numerum multitudinis ipsarum qvantitatum producere summam datarum qvantitatum. Vel qvod idem valet. Dioph. Alex. d. numer. multág. prop. 4. & 5.

Summam qvantitatum Arithmeticè proportionalium æqvari producto ex semisse terminorum in summam extremorum. Bachetus ad d. prop. 4. & 5.

Qvod ut ostendamus, sint qvantitates in Arithmetica progressione qvotcunqve, qvarum primus terminus a, differentia x: v. g. hæ qvinqve: a, $a + x$, $a + 2x$, $a + 3x$, $a + 4x$, ubi numerus terminorum impar: aut hæ sex a, $a + x$, $a + 2x$, $a + 3x$, $a + 4x$, $a + 5x$, ubi numerus terminorum par. Qvia ergo in singulis terminis x occurrit semel ampliùs atq; in proximè præcedente; patet esse in priori grogressione $a + \overline{a + 4x} \infty \overline{a + x} + \overline{a + 3x} \infty \overline{a + 2x}$ bis sumtis: & in posteriori esse $a + \overline{a + 5x} \infty \overline{a + x} + \overline{a + 4x} \infty \overline{a + 2x} + \overline{a + 3x}$.

Unde conficitur utrobiqve summam omnium æqvari producto semissis numeri terminorum in aggregatum extremorum. Q. E. P.

Seqvitur altera regula, qvæ invenire docet summam qvadratorum à qvotlibet qvantitatibus dispositis in progressione arithmetica cujus differentia minimo termino æqvalis: sc.

Bachet. l. 2. App. ad Dioph. de num. multäg. prop. 5. reg. 2.

Ducendum esse numerum terminorum in planum sub maximo & sub summa extremorum, & producto addendum, qvod fit ex minimo in summam omnium, compositiq; trientem fore summam qvadratorum.

Hoc ut dilucidè ostendatur, sint qvadrata ejusmodi ordine disposita ut in schemate sc. ABGH ∞ *aa* BCKL ∞ *4aa*. CDNO ∞ *9aa*, DFQR ∞ *16aa* &c. Hic qvoniam

figur. I.

Qvadratum GHIK est æqvale dimidio parallelogr. HKIL:

h. e. $aa \infty \frac{2aa}{2}$

Nec non parallelogram. IMLN ∞ dimidio parallelogrammi SNTO: $3aa \infty \frac{6aa}{2}$

Et parallelogramm. MOPZ ∞ dimidio parallelogrammi

TEQR: $6aa \infty \frac{12aa}{2}$ & sic in infinitum:

patet fore summam parallelogrammarum GHIK, ILMN, & MPOQ ∞ dimidio summæ parallelogrammorum HKSL, SNTO, TQER & sic infinitum.

Ex qvo seqvitur si productum ex summa omnium & maximo, h. e. parallelogr. APFR bis summatur & producto addatur, qvod fit ex minimo in summam omnium, h. e. parallelogr. AGFE: Compositi trientem fore summam qvadratorum. Cum verò per præcedentem summa omnium sit æqvalis semissi terminorum in summam extremorum: patet idem obtineri si numerus terminorum ducatur in planum sub maximo & summa extremorum. Q. E. P.

His ita prælibatis ad rem ipsam accingimur totius Geometriæ fundamenta breviter atq; perspicuè qvantum per ingenii tenuitatem licebit, exhibituri.

GEO-

GEOMETRIA ſcientia eſt, qvæ omnium corporum menſuras cognoſcere docet. Unde objectum ejus eſt extenſio, in qva qvatuor notari poſſunt, Punctum ſcilicet, Linea, Superficies ac Corpus ſeu Solidum. Vel enim tota extenſio conſideratur, qvatenus in longitudinem, latitudinem atqve altitudinem porrigitur, qvod Solidum eſt: vel longitudo tantùm atqve latitudo ſepoſita altitudine cogitatur, qvæ ſuperficies eſt: vel longitudo ſola, qvæ Linea eſt: vel deniqve particula indefinitè minuta, cujus nulla qvaſi pars ſit, qvod eſt Punctum. Ubi liqvet Lineam ex indefinitè multis punctis conflari adeoqve tanqvam motu puncti continuo ortam concipi poſſe; non ſecus ac ſuperficies omnis motu lineæ, ac Solidum motu ſuperficiei deſcribi ac generari poteſt. Cùm verò omnis motus vel rectà feratur, vel ad latera deflectat, neceſſario duæ emergunt linearum ſpecies; Recta ſcilicet & Curva: Unde porrò & Superficies erit vel rectilinea vel curvilinea, ac ſolidum vel rectilineum, vel curvi lineum. Sic duæ ſunt generaliſſimæ omnis Geometriæ partes, qvarum altera naturam linearum rectarum, & qvæ ex iis oriuntur ſuperficierum ac ſolidorum perſeqvitur, altera verò curvarum ſcientiam tradit. Utraqve autem tribus abſolvitur ſectionibus, pro triplici ſcilicet genere qvantitatum (punctum enim non tam ut qvantitas, qvàm ut qvantitatis principium ſpectatur) qvarum ordine naturam examinat. Qva methodo ita utemur, ut interim ſingulas qvantitates qvaſi ex ſuis oriundas initiis contemplaturi ſimus; nec enim directa magis ad veritatem eſt via, qvàm illa, qvæ rerum origines inqvirit. Cumqve ſingulæ illæ qvantitates infinitis diverſis motibus generari qveant, eos hîc vel aſſumemus vel ſupponemus, qvi cùm facillimi ſint ac ſimpliciſſimi rem ipſam diſtinctiſſimè explicant. Erit itaqve:

PARS

PARS PRIMA De LINEIS RECTIS & QVÆ EX IIS CONSTANT SUPERFICIEBUS & SOLIDIS.

SECTIO I. De Lineis Rectis.

Definitiones Primæ.

1. SI punctum aliqvod ab A versus I moveatur eâ lege, ut semper indirectum procedat neqve usqvam ad latera deflectat, hujus
fig. 1. puncti motu describetur *Linea Recta*.

Unde recta linea inter duo puncta est brevissima.

2. Qvod si linea aliqva recta AP in transversum deferatur, ut singula ejus puncta A, G, I, M, P lineas rectas efforment; lineæ à singulis punctis descriptæ dicentur *parallelæ*.

3. Ipsa verò inclinatio lineæ genetricis AP, ad qvamlibet ortarum v. g. ad PR dicetur *Angulus rectilineus*.

4. Qvi angulus si fuerit ab utraqve parte æqvalis *Rectus* dicitur, & tum E D angulos rectos utrinqve faciens est *Perpendicularis*:
fig. 2. qvi verò recto angulo major est *Obtusus*, & qui eo minor, *Acutus* appellatur.

THEOREMATA.

I. Recta linea E D alii rectæ AB qvomodocunqve insistens, facit aut duos angulos rectos, aut duobus rectis æqvales.

E. 13. 14. l. *Anguli orti vel sunt æqvales inter se vel non: Si illud; utiq; recti sunt* (α). *Sin hoc, concipiatur Perpendicularis* ED: *Sit q;*
α. def. 4. h. *Angulus* EDA ∞ EDB ∞ a.

Ang. EDC ∞ x

Ergo Ang. CDB ∞ a - x

Ang. ADC ∞ a + x

Uterq; CDB + ADC ∞ 2 a. Q. E. P.

Co-

Coroll.

Si plures rectæ ED, CD ad idem punctum D in eadem recta concurrant: omnes, qvi ab iis constituuntur anguli erunt duobus rectis æqvales. E. 15. I.

II. Si duæ rectæ AB, GI se invicem secuerint, erunt anguli ad verticem inter se æqvales.

Sit Ang. AHG ∞ a GHB ∞ b AHI ∞ c IHB ∞ d.
dico c *esse* ∞ b *&* a ∞ d.

Erit enim a + b ∞ (β) 2 *rectis* & b + d ∞ (β) 2 *rectis* β I.h.
It. a + c ∞ (β) 2 rectis.

adeoqve a + b ∞ b + d — *Ergo* a ∞ d
Item a + b ∞ a + c — *Ergo* b ∞ c. Q.E.P.

III. Si eidem rectæ AB duæ parallelæ CD, GH insistant, erunt anguli versus easdem partes æqvales: Angulus CDB angulo GHB & ang. CDA ang. GHA.

Cum enim parallelæ CD, GH, *describantur punctis* D *&* H, *quæ in linea* AB *translatione sua dictas parallelas describente* (γ) *semper eadem manent ac æquidistant*; *necessariò* CD *&* GH *ubiq; æqvidistant*, *h.e.* GH *non magis ad AB inclinatur qvàm* CD. Q.E.D. γ. d. 2. h.

Coroll.

1. In duas parallelas CF, GI incidens recta AB angulos alternatim æqvales facit sc. Ang. FDH ∞ GHD, uterq; enim ∞ (δ) ADC; interiores autem ad easdem partes CDH, GHD duobus rectis æqvales efficit (ε). E. 27. 28. 29. I. δ. II. & III. h.

2. Vice versa, si in duas parallelas incidens recta angulos versus easdem partes aut alternatim æqvales facit, aut deniqve interiores duobus rectis æqvales, erunt dictæ lineæ parallelæ. ε. III. & I. h.

IV. E pluribus rectis inter duas parallelas constitutis, brevissima est perpendicularis; qvæ verò cum parallelis æqvales versus eam partem ad qvam vergunt faciunt angulos, æqvales sunt; & qvæ minorem versus eam partem cum subjecta angulum facit, major est illâ, qvæ facit majorem. fig. 3.

1. *Perpendicularis* AB *brevior est omni non perpendiculari, v.g.* CD. *Promotâ enim juxta* def. 2. AB *ad* D *cum* ED *coincidit*, *qvæ*

si deflectat manente puncto D, *ut rectæ* CD *insistat, necessariò omnia ejus puncta versus* DR *deprimentur, adeoq; E cadet infra* C *h. e.* CD *erit longior qvàm* ED *seu* AB. Q. E. D.

2. CD, FH, HK *æqvales angulos* CDK, FGK, HKG *cum parallela* BK *facientes versus eas partes ad qvas vergunt, æqvales sunt: qvia enim duæ illæ parallelæ æqvidistant, omnes rectæ ita inter eas ductæ ut æqvaliter versus parallelarum alterutram inclinentur, æqvales erunt.* Q. E. P.

3. GL *minorem angulum faciens cum* GK, *qvam facit* GI *major est, qvàm* GI, *nec non* GN, *qvàm* FG: *simul ac enim* GI, *aut* FG *magis vergunt versus subjectam parallelam, qvàm in eo, in qvo supponuntur esse situ, omnibus suis punctis ad eam accedent, adeoq;* I & T *ponentur infra puncta* L *aut* N, *h. e. recta* GI *minor est, qvàm* GL *&* FG *qvàm* GN. Q. E. D.

Nec de conversa hujus dubitari potest.

Coroll.

1. Idem omnino obtinet in lineis constitutis inter binas diversas sed ejusdem distantiæ parallelas; qvarum & perpendicularis brevissima est, qvæ verò cum parallelis æqvales versus eam partem ad qvam vergunt faciunt angulos æqvales sunt, & qvæ minorem versus eam partem cum subjecta angulum facit major est illâ, qvæ facit majorem, & vice versa.

E. 7. 1. 2. Duæ rectæ GI, GN ex punctis I & N. ad unum tantùm punctum G ad easdem partes conjunguntur.

V. Si per tres pluresve parallelas duæ rectæ ductæ, siqvidem parallelarum eadem est distantia, segmenta rectarum inter parallelas comprehensa æqvalia sunt, sin minus proportionalia.

Sint rectæ CD, FG, GL *ductæ per parallelas* NL, QO, TP, BK: *dico*

1. *Cum parallelæ* NL *&* QO, *item* QO *&* TP, *item* TP *&* BK *eandem inter se habent distantiam,* CQ *esse* ∞ QT ∞ TD, *&* FR ∞ RS ∞ ST: *sunt enim anguli* Q, T, D, *æqvales* (α).

α Cor. 1. IV. h.

2. *Cum parallelæ* NL, QO, BK *non eandem servant distantiam, erit segmentum* FR *ad* RG: uti LO *ad* OG.

Sit enim FR ∞ 2 a, OL ∞ b, *ducaturq; parallela* TP *ita ut* SR *faciat* ∞ SG ∞ a.

Erit

Erit qvoniam parallelæ NL, QO, TP, BK *omnes ejusdem sunt distantiæ necessario uti jamjam ostendimus &* OP ∞ PG ∞ b *atq;* OG ∞ 2b, *adeoq;* a *ad* 2a: *uti* b *ad* 2 b. Q. E. D.

Sic conversa hujus patet ex conversa Cor. I. IV. h.

SECTIO II.

De Superficiebus Rectilineis.

Definitiones Secundæ

I. SI recta linea indefinitè protensa A B, manente uno puncto A fixo pertranseat subjectam rectam BC ita, ut aliqvod semper lineæ AB punctum, rectæ BC inhæreat: qvæ eo motu describitur figura *Triangulum* dicitur. fig. 4.

2. Hoc pro diversitate laterum est vel *Æquilaterum*, qvod tria; vel *Isosceles*, qvod dua latera æqualia habet, vel *Scalenum*, qvod nulla. Ratione verò angulorum est vel *Rectangulum*, quod habet rectum; vel *Amblygonium*, qvod obtusum; vel *Oxygonium*, qvod tres habet acutos angulos.

3. Si recta AP in transversum deferatur ita, ut singula ejus puncta, lineam rectam describant, qvod eo motu percurritur spatium APFR *Parallelogrammum* dicitur. fig. 1.

Hoc ergo semper duo opposita latera & angulos habet aqvalia. E. 34. I.

4. Hoc si æqvilaterum & rectangulum est *Quadratum* dicitur; si rectangulum non autem æqvilaterum *Rectangulum*: si æqvilaterum sed non rectangulum *Rhombus*: si nec rectangulum nec æqvilaterum *Rhomboides* appellatur.

5. *Altitudo* figuræ est linea à vertice ad basin perpendicularis.

6. *Figuræ similes* dicuntur, qvæ habent angulos æqvales & latera proportionalia.

THEOREMATA.

VI. Trianguli ABC duo qvælibet latera AB, BC majora sunt reliqvo AC. E. 20. I.

Nulla enim brevior linea inter A & C consistere potest qvàm recta. (α) Ergo AC *minor est, qvàm* AB + BC. Q. E. D. fig. 4. (α) def. I. Cor. Sect. I

E. 17. 32. I. VII. Omnes anguli in triangulo (ABC) sunt duobus rectis æqvales.

Fiat DAE *parallela rectæ* BC.

β. Cor. 1. *Quoniam e. ang.* EAB ∞ (β) ABC & DAC ∞ (β) ACB, *erunt*
III. h. *anguli* ABC + BAC + ACB ∞ *angulis* DAB + BAC + EAC ∞
γ. cor. I. h. (γ) *2 rectis*. Q. E. D.

Coroll.

1. Omnes anguli simul sumti æqvales sunt in qvolibet Triangulo: & si duo anguli Trianguli unius sunt duobus angulis alterius Trianguli æqvales, & tertius tertio æqvalis erit.

2. In qvovis triangulo, uno latere producto externus, æqvalis est duobus internis & oppositis. E. 16. 32. I.

E. 8. VI VIII. Triangulum rectangulum, æqviangulum est triangulis, qvæ fiunt à linea recta ab angulo recto ad basin perpendiculariter demissa.

fig. 5. *Sit in* △lo ABC *ex recto* B *demissa perpendicularis* BD, *ponaturq; Ang.* BAD ∞ a, ACB ∞ b ABD ∞ c & DBC ∞ d; *ut rectus* ABC ∞ BDA ∞ BDC *fiat* ∞ c + d.

α. Cor. 1. *Qvoniam ergo Anguli* △*li* ABC ∞ *angulis* △*li* BAD (α) *h. e.*
VII. h. d + c + a + b ∞ d + c + a + c

Erit b ∞ c.

Porrò & anguli △li ABC ∞ *angulis* △*li* BDC (α)

sc. d + c + a + b ∞ d + c + d + b

Ergo a ∞ d.

Triangulum itaqve ABC æqviangulum est △*lis* BDA & BDC. Q. E. P.

E. 5. 6. I. IX. Æqvales anguli in Triangulo ab æqvalibus lateribus subtenduntur & vice versa.

fig. 4. *In* △lo ABC *sit angulus* ABC ∞ *angulo* ACB: *dico fore rectam* AB ∞ AC.

β cor. 1. *Ductâ enim rectâ EAD parallelâ ad* BC; *erit* (β) *angul.* EAB ∞
III. h. *ang.* ABC; *nec non ang.* DAC ∞ ACB: *adeoq;* EAB ∞ DAC.
γ. IV. h. *Qvapropter erit* (γ) & AC ∞ AB.
δ Conversa IV. *Sic & conversa patet* (δ). Q. E. D.

X. Ma-

X. Major angulus in Triangulo à majori latere ſubtenditur & vice verſa. E. 18. 19. I.

Sit ang. ABC *major angulo* ACB: *dico* AC *fore majorem* AB.

Qvoniam enim AC *minorem facit angulum cum* BC *ad eam partem ad qvam vergit qvam* AB *cum* BC *erit* (γ) AC *hac major. Sic* (δ) *& converſa patet.* Q. E. D.

XI. Triangula æqviangula habent latera proportionalia & vice verſa. E. 4. 5. VI.

Sint △*la æqviangula* ABC *&* ADE: *dico* AB *eſſe* AD: *uti* AC *ad* AE *& uti* BC *ad* DE. fig. 6.

Quia enim ex hypotheſi ang. B ∞ D *& ang.* C ∞ DEA; *erit* (ε) BC *parallela ad* DE, *cui ſi concipiatur eſſe tertia* AF *parallela; erunt duæ rectæ* AB, AC *per tres parallelas* AF, DE, BC *ductæ adeoq;* (ζ) AD *ad* BD: *uti* AE *ad* EC *& componendo* (η) AB *ad* AD, *uti* AC *ad* AE: *Eadem ratione manifeſtum erit* AC *eſſe ad* AE: *ut* BC *ad* DE, *ſi ſc. angulus* DEA *angulo* C *ſuperimponatur & reliqva fiant ut antè.* Q. E. P. ε. cor. 2. III. h. ζ. V. h. η. 3. prolog. n. 3.

De converſa dubium eſſe non poteſt per (ϑ). ϑ. conv. V. h.

Coroll.

1. Recta baſi parallela latera Trianguli ſecat proportionaliter, adeoqve à Triangulo Triangulum ſimile abſcindit & vice verſa. E. 2. VI.

2. Triangula æqvilatera ſunt æqviangula: nam & ea habent latera proportionalia. E. 8. I.

XII Triangula, qvæ duos angulos æqvales habent & unam rectam æqvalem, habent & reliqvum angulum & reliqva latera æqvalia. E. 26. I.

Sint in △*lis* ABC *&* ACG *ang.* BAC ∞ *ang.* ACG *&* B ∞ G *item recta* AB ∞ GC, *erit neceſſario & ang.* ACB ∞ *ang.* CAF (α): *adeoq;* △*la hæc æqvi angula, qvæ proinde* (β) *latera habebunt proportionalia ſc. uti* BA *ad* GC *ſic* BC *ad* AG &c. *ſed* BA *eſt* ∞ CG. *Ergo & reliqva latera æqvalia.* Q. E. D. fig. 6. α. Cor. 1. VII. h. β. XI. h.

XIII. In triangulo rectangulo qvadratum, qvod fit à latere angulum rectum ſubtendente, æqvale eſt iis, qvæ à lateribus rectum angulum continentibus fiunt qvadratis. E. 47. I.

Sit in triang. rectang. ABC, AB ∞ x, BC ∞ y, AC ∞ z, dico fore xx + yy ∞ zz. fig. 5.

γ. VIII. h. *Ob æquiangula enim triangula* ABC *&* ABD (γ) *erit* (δ).
δ. XI. h. *uti* z *ad* x: *ita* x *ad* $\frac{xx}{z}$ ∞ AD.

Item obæqviangula △la ABC & BDC (γ) *erit* (δ)

uti z *ad* y: *ita* y *ad* $\frac{yy}{z}$ ∞ DC

Tota ergo AC $\frac{xx + yy}{z}$ ∞ z

adeoq́; xx + yy ∞ zz. Q. E. P.

Coroll.

fig. 6. In triangulo Oxygonio ABC posita BC ∞ a AB ∞ b, AC ∞ c & CH ∞ x erit BH ∞ $a-x$ adeoqve perhanc

$bb - aa + 2ax - xx$ ∞ $cc - xx$

Et $bb + 2ax$ ∞ $aa + cc$.

E. 12. II. E. 13. II. Qvod si triangulum esset obtusangulum & angulus B obtusus foret cc ∞ $bb + aa + 2ax$.

XIV. Trianguli latera sunt proportionalia, segmentis baseos, qvæ fiunt à linea angulum oppositum bisecante.

E. 3. VI. fig. 7. *Sit* △ ABC *recta bisecans ang.* A, AD: *dico fore* AC *ad* AB *uti* CD *ad* DB.

Producta enim AC, *factaq́*; EA ∞ AB, *erit ang.* AEB ∞ ang. ABE

ε. IX. h. (ε) *ang. autem* BAC *est* ∞ *ang.* ABE + AEB (ζ) *adeoq́; ang.* DAB
ζ. Cor. 2. ∞ ABE: *& hinc* (η) *linea* BE *parallela lineæ* AD, *hoc est* (ϑ) *tri-*
VII. h. *angulum* ADC *est simile triangulo* EBC: *& hinc* CA *ad* AE *seu* AB,
η. Cor. 2. *uti* CD *ad* DB. Q. E. P.

III. h. XV. Triangula, qvæ habent duo latera circa æqvalem angu-
ϑ. XI. h. lum proportionalia, similia sunt.

E. 6. VI. *Sint △la* ABC, ADE *in qvibus ang. A communis &* AB *ad* AD:
fig. 6. *uti* AC *ad* AE: *dico △la ea esse similia.*

ι. 3. prolog. *Qvoniam enim* AB *ad* AD: *uti* AC *ad* AE *erit & dividendo* (ι)
n. 4. DB *ad* AD *uti* EC *ad* AE, *adeoq́; latera △li* BAC *à recta* DE *secta*
κ. Cor. 1. *sunt proportioneliter, unde erit* BC *ad* DE (κ) *parallela adeoq́; di-*
XI. h. *cta triangula similia sunt* (κ) Q. E. D.

Coroll.

Coroll.

Ergo Triangula, qvæ habent duo latera circa æqvalem angulum æqvalia, habent & reliqvum latus & reliqvos angulos æqvalia. E. 4. I.

XVI. Triangula similia sunt, qvæ habent duo latera proportionalia & angulum hisce oppositum æqvalem & reliqvos ejusdem speciei. E. 7. VI.

Sint in Triangulis ABC, ADE, *latera* AE, ED, AC, BC *proportionalia & Angulus A communis; fiatq;* FI *lineæ* AB *parallela; & sint* AE ∞ a, DE ∞ b, EC ∞ c, IC ∞ d, IB ∞ e. fig. 6.

Qvoniam a *ad* b: *uti* a + c *ad* d + e: & (β) a *ad* c: *uti* e *ad* d α. 2. prol.

erit (α) a d + e a ∞ *ab* + b c. *erit* (α) ad ∞ c e. β. V. h.

positoq; *pro* ad, ce: ce + ea ∞ ab + bc

$$\frac{e}{b} \infty \frac{a+c}{a+c}$$ *adeoq;* e ∞ b *h. e.* IB ∞ DE.

Jam verò cum ex hypoth. DE *faciat cum* DA *angulum ejusdem speciei, atque* BC *cum* BA; *necessariò* DE & BL *versus easdem partes vergunt. Atqui duæ rectæ æquales inter duas parallelas* (γ) *æquales etiam angulos cum subjecta faciunt versus eas partes ad quas vergunt. Ergo ang.* B. ∞ *ang.* D. *adeoque* (δ) & E ∞ C & *triangula ipsa* (ε) *similia.* Q. E. P. γ. IV. cõv. h.

XVII Area trianguli est æqualis basi in altitudinis semissem ductæ. δ. Cor. 1. VII. h.

Sit triang. qvodvis ABC; *ejusq; basis* ∞ x, *altitudo* AD ∞ a: ε. XI. h.

dico aream ejus esse ∞ $\frac{a\,x.}{2}$ fig. 9.

Trianguli enim ABC *area constituitur ex indefinitè multis rectis lineis* ef, gh, ik &c. *basi parallelis, quæ singulæ æqualiter ab invicem dissident, & à triangulo hoc abscindunt triangulum ei simile* (α). *Unde efficitur, rectas illas esse Arithmeticè proportionales: sunt enim inter se* ef, gh, ik &c. *ut* Ae Ag, Ai, *h. e. ut* 1. 2. 3 &c. *propter æquales excessus* eg, gi, &c. *adeoque omnium harum rectarum aggregatum, h. e. totum triangulum* ABC *erit æquale summæ rectarum indefinitè multarum arithmeticè proportionalium, quarum minima est punctum* A, *maxima verò ipsa basis* BC. α. Cor. 1. XI. h.

Nu-

Numerus autem earum rectarum erit ∞ altitudini figuræ; cum inter basin & verticem quomodocunque positum, semper tot tantum interesse possint lineæ, quot puncta continet altitudo AD. *Ergo ut summa harum rectarum inveniatur juxta reg. priorem in prolegomenis ostensam, addenda hic erit puncto* A *basis* BC: *h. e.* x *ad* o (*tantundem n. valet punctum in extensione atque cifra in numero*) *ut aggregatum idem sit atque ipsa basis* ∞ x, *qua ducta in* $\frac{1}{2}$ a *semissem altitudinis, totum triangulum erit* ∞ $\frac{ax}{2}$ Q.E.D.

XVIII. Area parallelogrammi est aqualis basi in altitudinem ductæ.

fig. 9. *Sit pararallelogramm.* ACBE, *& basis* BC ∞ x *Altitudo* ∞ a: *dico ejus Aream esse* ∞ a x.

Area enim hæc constituitur à basi ∞ x *toties sumta, quot puncta in altitudine* ∞ a *continentur: h. e. est* ∞ a x: *qvantumcunq; etiam parallelogrammum hoc fuerit obliquangulum.* Q. E. P.

Coroll.

E. 34.41. I. Ergo omne triangulum est dimidium parallelogrammi eandem basin & altitudinem habentis.

E. 1. VI. XIX. Triangula & parallelalogramma æqvialta sunt ut bases, & qvæ æqvalem basin habent sunt ut altitudines.

fig. 8. *Sint Triang. æqvialta* DBC *&* DBE. *Sintque parall. æquialta* DHBC *&* DGBE.

& sit altitudo communis ∞ a

BC ∞ x BE ∞ y

Erit △*lum* DBC *ad* DBE. *It. Parall.* DHBC *ad* DGBE

h. e. $\frac{ax}{2}$ *ad* $\frac{ay}{2}$: *uti* x *ad* y. *h. e.* ax *ad* ay: *uti* x *ad* y.

Alteræ partis eadem est demonstratio: sit enim basis communis ∞ x *& altitudo alterius* ∞ a, *alterius* ∞ b:

erit $\frac{ax}{2}$ *ad* $\frac{bx}{2}$ *in Triangulis* } *: uti* a *ad* b. Q. E. P.
& ax *ad* bx *in Parallelog.* }

Coroll.

Coroll.

Triangula & parallelogramma æqvialta & æqvalis basis, sunt æqvalia. E.35.36.37. 38.39.40.I.

XX. Triangula & parallelogramma similia sunt inter se in duplicata ratione laterum homologorum. E. 19. VI.

Sint triangula simil. ABC, ADE *Sint parallelogramma simil.* ABCG ADEF fig. 6.

Sitqve BC $\propto$ a. AB $\propto$ c. AC $\propto$ e AH $\propto$ x.
DE $\propto$ b. AD $\propto$ d. AE $\propto$ f AL $\propto$ y.

dico $\frac{ax}{2}$ *esse ad* $\frac{by}{2}$ (*uti &* ax *ad* by) *uti* aa *ad* bb : cc *ad* dd : ee *ad* ff.

Est enim ex hypothesi

$$\frac{c}{d} \propto \frac{a}{b} \propto \frac{e}{f} \propto \frac{x}{y} \quad \textit{Qvare} \quad \frac{ax}{by} \ \textit{est} \propto \frac{aa}{bb} \propto \frac{cc}{dd} \propto \frac{ee}{ff} \quad \text{Q.E.D.}$$

XXI. Triangula & parallelogramma æqvalia, qvæ habent unum angulum æqvalem, habent latera circa æqvales angulos reciprocè proportionalia. E.14.15.VI.

Sit triang. ABC (*vel parallelogr.* ABCF.) $\propto$ *triangulo* DBE (*vel parallelogr.* DBEG) $\propto$ x , *& triangulum* DBC (*vel parallelogr.* DBCH) $\propto$ y *sitq;* AB $\propto$ a, BD $\propto$ b , BC $\propto$ c & EB $\propto$ d : *dico* AB $\propto$ a *esse ad* DB $\propto$ b ; *uti* BE $\propto$ d *ad* BC $\propto$ c. fig. 8.

Est enim (α) △ ABC *vel* □ ABCF $\propto$ x *ad* y : *uti* a *ad* b α. XIX. h.
& △ DBE *vel* □ DBGE $\propto$ x *ad* y : *ut* d *ad* c.
Ergo (β) a *ad* b : *uti* d *ad* c Q. E. P. β. 1. prolog.

XXII. Triangula & Parallelogramma , qvæ habent unum angulum æqvalem , habent inter se rationem, qvæ ex lateribus, qvæ circa æqvalem angulum , componitur.

Sit triang. ABC *vel* □*um* ABCF $\propto$ x *Sitq;* AB $\propto$ a
△*lum* BDC *vel* □*um* BDCH $\propto$ z BD $\propto$ b
△*lum* EDB *vel* □*um* EBDG $\propto$ y BC $\propto$ c
BE $\propto$ d.

Qvoniam (γ) x *ad* z : *uti* a *ad* b , *&* y *ad* z *ut* d *ad* c γ. XIX. h.
erit (δ) bx $\propto$ az & cy $\propto$ dz . δ. 2. prolog.

 atqve

$$\text{atqve}\quad \frac{bx}{a} \propto z \quad \propto \quad \frac{cy}{d} \propto z$$

$$bdx \propto acy$$

$$\text{Ergo}\quad \frac{x}{y} \propto \frac{ac}{bd}\quad \text{Q.E.D.}$$

fig. 6.

E. 24. 26. VI. XXIII. Omnes figuræ multilateræ similes, si sibi ad angulum æqvalem imponantur circa easdem diematros consistant, oportet.

Sint figuræ similes ABCDE, AFGHI.

fig. 10. *Qvoniam est ex hypothesi* AB *ad* AF *ut* BC *ad* FG, *præterea angulus* F $\propto$ *angulo* B: *erunt* (α) *triangula* ABC, AFG *similia*

α. XV. h. *adeoq́; angulus* GAF $\propto$ *ang.* BAC, *h. e.* AC *incidet in* AG. Q.E.D.

Eadem in reliqvis diametris demonstratio.

Coroll.

E. 20. VI. Figuræ similes per diametros suas in æqvè multa triangula similia dividuntur.

E. 20. VI. XXIV. Omnes figuræ multilateræ similes sunt in duplcata ratione laterum homologorum.

Sint figuræ similes ABCDE & AFGHI

fig. 10. *Sitq́;* AF $\propto$ a, AB $\propto$ b, AG $\propto$ c, AC $\propto$ d, AH $\propto$ e & AD $\propto$ f.

Qvoniam ductis diametris AC, AD, *triangula* AFG & ABC, *item* $\triangle$*la* AGH & ACD, *nec non* $\triangle$*la* AHI & ADE (α) *similia sunt;*

α. Cor. XXIII. h. *erit* (β) $\triangle$*um* AFG *ad* $\triangle$*lum* ABC *uti* aa *ad* bb; $\triangle$*lum* AGH *ad*

β. XX. h. $\triangle$*um* ACD, *uti* cc *ad* dd; $\triangle$*um* AHI *ad* $\triangle$*um* ADE *uti* ee *ad*

γ. XI. h. ff. *Atqvi* (γ) a *est ad* b, *uti* c *ad* d; & c *ad* d, *uti* e *ad* f.

δ. def. 4. prolog. *h. e.* (δ).

$$\frac{a}{b} \propto \frac{c}{d} \propto \frac{e}{f} \quad \textit{adeoq́; \&}$$

$$\frac{aa}{bb} \propto \frac{cc}{dd} \propto \frac{ee}{ff}.$$

Quo fit, ut cùm singulæ partes figuræ AFGHI *sint ad singulas partes figuræ* ABCDE; *uti* aa *ad* bb, *vel* cc *ad* dd, *vel* ee *ad* ff;

ε. 3. prolog. n. 5. *etiam* (ε) *tota* AFGHI, *sit ad totam* ABCDE; *uti* aa *ad* bb *vel* cc *ad* dd *vel* ee *ad* ff. Q.E.D.

SE-

SECTIO III.

De Solidis Rectilineis

Definitiones tertiæ.

1. SI recta qvævis AB indefinitè protensa manente uno puncto A fixo, circa qvamvis superficiem rectilineam v. g. BCDE in alio plano constitutam revolvatur, ita ut aliqvod semper lineæ mobilis punctum lineis extimis hujus superficiei BCDE inhæreat; orietur eo motu superficies pyramidalis, qvodqve hac superficie continetur solidum, *Pyramis* dicitur. fig. 11.

2. In ea punctum A, vertex; superficies autem BCDE basis appellatur, qvæ prout est vel triangula vel qvadrangula &c. ipsa Pyramis triangula, qvadrangula &c. fit.

3 Si qvodvis planum v. g. EFGH juxta lineam rectam immotam EA, qvomodocunqve super illo elevatam attollatur ita ut in omni elevatione maneat sibi ipsi parallelum nec ullo modo rotetur: qvæ eo motu describitur figura solida, *Prisma* dicitur. fig. 12.

THEOREMATA.

XXV. Solidum Pyramidis æqvale est basi in tertiam partem altitudinis, aut altitudini in tertiam partem baseos ductæ.

Sit Pyramis ABCDE, *ejusq; basis* BCDE, ∞ x, *altitudo* ∞ a: *dico ejus solidum esse* ∞ $\frac{1}{3}$ ax. fig. 11.

Hæc Pyramis constituitur ex indefinitè multis figuris rectilineis (BCDE, fghi, klmn, opgr &c. *usq; ad verticem* A) *sibi invicem parallelis & similibus, omnes enim sunt æqviangulæ & latera habent proportionalia. Omnes autem figuræ rectilineæ similes sunt induplicata ratione laterum homologorum* (α) *unde erit* BCDE *ad* fghi; *uti qvadratum* ED *ad qvadratum* ih: *& vicissim* (β) *uti* BCDE *ad qvadratum* ED, *sic* fghi *ad qvadratum lineæ* ih; *sic* klmn *ad quadratum lineæ* ln *& sic porrò usq; ad ipsum verticem* A. *Unde consit omnes istas figuras constituentes Pyramidem hanc h. e. totam Pyramidem esse ad summam omnium*

α. XXIV. 6

β. 3. prolog. n. 2.

quadratorum ex lateribus omnibus homologis lineæ DE parallelis ortorum; uti dicta figura BCDE ad quadratum lineæ DE; cùm enim singulæ partes utriusque dictam habeant rationem, eandem

γ. 3. prolog. n. 5. *& (γ) tota inter se servabunt.*

Ponamus igitur rectam DE ∞ b, ejusq; quadratum ∞ bb atque invenienda jam sit summa omnium qvadratorum ex rectis sibi parallelis, qvæ sc. figurarum omnium pyramidem constituentium homologa sunt latera DE, ih, nl, rp &c. ortorum. Ubi meminerimus omnes illas rectas, cùm sint sibi parallelæ & æquidistantes ac

δ. v. dem. XVII. h. *Triangulum ADE constituant (δ) esse aggregatum arithmeticæ progressionis, cujus primus terminus punctum A ∞ o ultimus terminus ∞ lineæ DE, numerus terminorum ∞ altitudini Pyramidis, non trianguli ADE (tot enim inter verticem basinq; tantum possunt esse plana rectilinea, quot sunt puncta altitudinis Pyramidis) differentia autem itidem ∞ puncto ∞ o. Ergo juxta regulam posteriorem in prolegomenis demonstratam, summa quadratorum, quæ quærimus erit ∞ $\frac{abb}{3}$: quod enim in terminum minimum ∞ o ducendum est erit ∞ o seu nihilo. Diximus verò & ostendimus antè, esse, uti quadratum DE ad BCDE ita summam inveniendam ad ipsam Pyramidem, h. e.*

uti bb *ad* x, *ita* $\frac{abb}{3}$ *ad Pyramidem quæ hinc invenitur*

esse ∞ $\frac{ax}{3}$ Q. E. D.

XXVI. Solidum Prismatis est æqvale basi ductæ in altitudinem.

fig. 12. *Sit prismatis* ABCDEFGH *basis* EFGH ∞ x, *altitudo verò* ∞ a: *dico ejus solidum esse* ∞ ax.

Solidum enim illud est aggregatum tot figurarum rectilinearum basi æqvalium & similium, quot inter utramque basin consistere possunt (v. g. EFGH, mikl, nopq, rstu, CDAB, &c) *totidem sc. quot altitudo ∞ a puncta habet, tot enim tantùm plana rectilinea inter eas interesse queunt, quantumcunque ipsum prisma fuerit obli-*

obliqvum. Ergo Solidum Prismatis æquatur basi in altitudinem ductæ. Q. E. D.

Coroll.

1. Omnis Pyramis est tertia pars Prismatis ejusdem altitudinis & baseos. E. 7. XII.

2. Omnes Pyramides & omnia Prismata ejusdem altitudinis sunt ut bases, & viceversa. E. 5. 6. XII. 25. 30. 31. 32.

XXVII. Pyramides & Prismata (h. e. qvæ similibus planis continentur) similia sunt in triplicata ratione laterum homologorũ. XI. E. 23. XI. 8.

Sint enim Pyramides similes ABCDE *&* aklmn; *sit q; basis unius* BCDE ∞ x *alterius* klmn ∞ y; *altitudo unius* At ∞ a, *alterius* As ∞ b. ED ∞ c. lm ∞ d. XII. fig. 11.

Erit primæ solidum (α) $\frac{ax}{3}$: *alterius* $\frac{by}{3}$ α. XXV. h.

quæ sunt uti ax *ad* by

Jam verò (β) x *ad* y; *uti* cc. *ad* dd. *h. e.* $\frac{x}{y} \infty \frac{cc}{dd}$: *nec* β. XXIV. h.

non a *ad* b; *uti* c *ad* d (*utraque enim* (γ) *uti* AE *ad* Am) γ. XI. h.

h. e. $\frac{a}{b} \infty \frac{c}{d}$ *Ergo* $\frac{ax}{by} \infty \frac{c^3}{d^3}$.

Sic & Prismata similia, qvalia sint v. g. ax *&* by: *sunt in triplicata ratione laterum homologorum; nam prisma* ax *est ad prisma* by, *uti Pyr.* $\frac{ax}{3}$ *ad Pyr.* $\frac{by}{3}$ Q. E. D.

XXVII. Pyramides & Prismata æqvalia habent altitudines & bases reciprocè proportionales. E. 34. XI. 9. XII.

Sint æquales Pyramides $\frac{ax}{3}$ *&* $\frac{by}{3}$ *aut prismata æqualia* ax *&* by: *ubi* a *&* b *sint altitudines* x *&* y *bases*

Quia $\frac{ax}{3} \infty \frac{by}{3}$ *&* ax ∞ by

Erit $\frac{a}{b} \infty \frac{y}{x}$ *h. e. uti* a *ad* b; *ita* y *ad* x. Q. E. P.

PARS SECUNDA
De
LINEIS CURVIS & QVÆ EX IIS CONSTANT SUPERFICIEBUS & SOLIDIS.

Uti linea recta describitur motu puncti indirectum semper abeuntis; ita Curva producitur motu puncti, semper h. e. in qvolibet puncto ad latera deflectentis. Unde patet omnem Curvam considerari posse ceu Polygonon indefinitè multorum laterum, tot sc. qvot diversos situs punctum mobile nancitur, præsertim si punctum tanqvam linea recta indefinitè parva spectetur. Atqve hinc manifestò variæ veritates ad omnes Curvas pertinentes possent deduci, siqvidem id operæ pretium foret. E. 16. III. Patet enim cuivis: omnem Curvam à recta in uno tantùm puncto tangi & angulum Contactus esse omni rectilineo minorem sive non angulum. Patet etiam Curvæ omnis, cujus punctum generans semper versus eandem partem deflectit, neqve tamen per gyros uti linea Spiralis in se recurrit, subtensas intra suum arcum totas E. 2. III. cadere & productas totas extra Curvam: adeoqve dictas Curvas à recta in duobus tantùm punctis secari. Ex eadem definitione etiam liqvet infinita posse esse Curvarum genera, ex qvibus tamen illa tantùm in Geometria admitti possunt, qvæ per motum a- V. Cart. liqvem continuum aut per plures, qvi se mutuo conseqvantur, aut Geom. l. etiam concurrentes unum compositum efficiant, qvorumqve uni ab II. ab init. aliis regantur, imaginari possumus. Motus tamen puncti ad latera ita deflectentis, vix sine una aut pluribus rectis, ad qvas referatur, determinari potest. Ubi simplicissima & prima omnium Curvarum, qvæqve sola simplici ac continuo motu lineæ rectæ punctive in ea decurritur Circulus est: cæterarum verò, qvæ per motûs compositos generantur rursus infinita sunt genera, cùm motuum simplicium qvi compositos constituunt, inter se ratio infinitis modis varia-

ria-

riari potest; ex qvibus tamen hodie notissima sunt Parabola, Ellipsis & Hyperbola. Et hæ sunt, qvarum naturam & præcipuas proprietates breviter hîc proseqvemur, qvod ad Elementa sufficere potest. Partis ergo hujus duo membra constituemus, qvorum prius Circulum, posterius reliqvas, qvas diximus, Curvas explicabit.

MEMBRUM I.

DE CIRCULO.

SECTIO I.

De Linea Circulari.

Definitiones Primæ.

1. SI linea recta AB, manente uno ejus termino A fixo tota simul circumferatur, donec redeat in locum, unde motum suum inchoavit; punctum B curvam describet BECD, qvam *Circulum* seu *Peripheriam* vocamus. fig. 13.

2. Et punctum fixum A *centrum* Circuli dicetur.

3. Recta AB vel AC vel AE &c. *Radius* Circuli.

4. Si bini radii AB, AD ita constituantur ut unam rectam efficiant EC (hoc est qvævis recta per Centrum ducta & utrinqve in circulo terminata) *Diameter* circuli appellabitur.

Coroll.

1. Cùm verò AB eo, qvo diximus modo rotatur, non tantùm punctum B, sed & singula reliqva puncta F, G, H &c. itidem Centrum sc. A; & hi sunt, qvi Circuli concentrici dicuntur. Ubi statim liqvet omnes Circulos concentricos sibi esse parallelos, seu in singulis punctis æqvidistare, cùm puncta F, G, H in radio AB, qvibus describuntur, semper eadem sint, in qvavis statione. Ex qvo porrò consit omnes Circulos non parallelos, inter qvos etiam sunt, E. 5. 6. III. qvi se mutuò vel tangunt vel secant, non esse concentricos.

2. Ex qva eadem circuli generatione fluit: Duos circulos se in E. 10. III. duobus tantùm punctis secare. Cum enim circuli se secent, tum

tan-

tantùm, cùm radii diversi ad idem punctum constituuntur, id au-
α. Cor. 2. IV.p.1. tem fieri non possit, nisi semel tantùm versus utramqve partem (α) patet propositum.

3. Porrò ex ea conseqvitur: Circulum ubiqve esse uniformem, h. e. æqvalia ejusdem Circuli segmenta, sibi imposita esse coextensa seu congruere, cùm omnes ejus partes motu planè eodem generen-
E. 24. 23. III. tur: idemqve est in similibus circulorum segmentis. Unde & illud patet: Si in circulo applicentur duæ rectæ æqvales, KL, MN, arcus KEL, MCN ab æqvalibus rectis subtensos inter se æqvales esse
E.28.29.III & vice versa; & similiter arcum, qvi subtenditur à majori recta KL esse majorem, eum verò, qvi à minore OP minorem.

THEOREMATA.

I. In circulo BCDE qvadratum rectæ KQ ex qvovis Circuli puncto K in Diametrum EC, perpendiculariter cadentis, æqvale est rectangulo EQC, sub segmentis diametri EQ, QC.

fig. 14. *Sit radius* AK, AB, AC *&c.* ∞ a, KQ ∞ y, ER ∞ x, *erit* AQ ∞ a-x *&* CQ ∞ 2 a-x: *dico* yy ∞ 2 ax-xx.

Est enim quadr. AK ∞ aa.

quadr. QA ∞ aa-2ax + xx.

β. XIV.p.1 *Ergo* (β) *quadr.* AE *seu* yy ∞ 2ax-xx. Q. E. D.

Coroll.

1. Si in circulo BCDE diameter EC, qvandam KL in Circulo du-
E. 3. III. ctam ad angulos rectos secat, bifariam eam secabit.

Producta enim KQ *ad* L, *sit* QL ∞ z, KQ ∞ y &c. *ut supra:*
γ. I. h. *dico* z ∞ y.

Quoniam ergò (γ) *tam* zz *quàm* yy ∞ 2ax-xx:

erit zz ∞ yy

& z ∞ y. Q. E. D.

2. Hinc & patet, diametrum circulum dividere in duas partes æ-
E. def.17.I. qvales.

Omnes enim rectæ, per diametrum perpendiculariter ductæ bifariam secantur, unde ipse circulus bifariam secatur.

3. In circulo maxima linea est diameter EC, aliarum autem, centro A propinqvior (h. e. in qvam ex centro ducta perpendicularis brevior est) MN major remotiore OP.

Sit

Sit ex A *in* OP *perpendicularis ducta* AR ∞ x, *& ex* A *in* MN *ducta perpendicularis* AS ∞ y, *sitq;* x *major quàm* y, *radius* a; *erit* DR ∞ a-x, BR ∞ a + x *&* ST ∞ a-y, KS ∞ a + y.

Quoniam ergo x *major* y *&* (δ) *quadr.* OR ∞ *parallelogr.* δ. l. h.
BRD ∞ aa-xx, *quadr. verò* SM ∞ *parall.* KST ∞ aa-yy

erit necessariò aa-yy *majus* aa-xx

& MS ∞ $\sqrt{aa-yy}$ *maj.* $\sqrt{aa-xx}$ ∞ OR. E. Cor. 1. l. h.

& MN ∞ (ε) $2\sqrt{aa-yy}$ *maj.* $2\sqrt{aa-xx}$ ∞ OP. Q. E. D. E. 14. III.

4. In Circulo æqvales rectæ æqvaliter à Centro distant & qvæ à Centro æqvaliter distant æqvales sunt.

Si enim manentibus reliquis ut antè x ∞ y

Erit & MN ∞ $2\sqrt{aa-yy}$ ∞ $2\sqrt{aa-xx}$ ∞ OP.

Vice versa si MN ∞ $2\sqrt{aa-yy}$ ∞ $2\sqrt{aa-xx}$ ∞ OP.

Erit & x ∞ y. Q. E. D.

5. Duæ rectæ OP, RS non per centrum extensæ se bifariam non secabunt. E. 4. III. fig. 15.

Cùm enim PT ∞ (α) TO: *&* RU ∞ US: *patet* PQ *majorem esse quàm* OQ, *&* RQ *quàm* QS. Cor. 1. l. h.

II. Si in Circulo duæ rectæ sese mutuò secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis unius æquale est ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur rectangulo. E. 35. III.

Duæ rectæ in circulo BCDE *se secantes, vel ambæ per centrum transeunt, vel alterutra tantum, vel neutra per centrum excurrit.* fig. 14.

1. *Si ambæ* CE, BD *per centrum transeunt: ponatur radius* ∞ a:

sive CA ∞ a ∞ BA ∞ a
AE ∞ a ∞ AD ∞ a

Ergo rectang. CAE ∞ aa ∞ BAD *rectang.* ∞ aa.

2. *Sin alterutra* DB *tantùm per centrum excurrit, eaq; alteram* KL *ad angulos rectos secat: sit* KQ ∞ (α) QL ∞ d, DQ ∞ b α. cor. 1.
radius ∞ a; *eritq;* QB ∞ 2a-b. l. h.

Ergo (β) dd ∞ 2ab-bb. *h. e.* □*tum* KQ *sive rectangulum* KQL ∞ *rectangulo* DQB. β. l. h.

D 3. *Sin*

fig. 15. 3. *Si nea quæ per centrum transit*, EC, *alteram* KL *non ad angulos rectos secat; sitq; radius* AC, AE, AK ∞ a, EQ ∞ b KQ ∞ c QL ∞ d:

Erit & hîc rectang. EQC ∞ 2ab-bb ∞ *rectang.* KQL ∞ cd.

α. cor. 1. l. h *Ductâ enim ex centro* A *perpendiculari* AM, *erit* (α) KM ∞ ML ∞ $\frac{1}{2}$ c + $\frac{1}{2}$ d & QM ∞ $\frac{1}{2}$ d - $\frac{1}{2}$ c: *adeoq;*

Quadr. KA ∞ aa □*tum* QA ∞ aa-2ab + bb.
□*tũ* KM ∞ $\frac{1}{4}$ cc + $\frac{1}{2}$ cd + $\frac{1}{4}$ dd □*tũ* QM ∞ $\frac{1}{4}$ dd - $\frac{1}{2}$ cd + $\frac{1}{4}$ cc.

γ. XIII. p. 1 *Et* □*tum* AM (γ) ∞ aa - $\frac{1}{4}$ cc - $\frac{1}{2}$ cd - $\frac{1}{4}$ dd ∞ □*to* AM (γ) ∞ aa-2ab + bb - $\frac{1}{4}$ dd + $\frac{1}{2}$ cd - $\frac{1}{4}$ cc.

Ergo 2 ab-bb ∞ cd.

4. *Denique si neutra rectarum, v. g. nec* KL, *nec* OP *per centrum* A *excurrit: erit per præcedent. demonstrationem* □ EQC ∞ □lo KQL & *rectang.* EQC ∞ □lo OQP. *Ergo rectangulum* KQL ∞ *rectangulo* OQP. Q. E. D.

E. 7. III. III. Si in diametro Circuli EC, assumatur punctum Q extra centrum ab eoque in Circulum ducantur rectæ QR, QP; maxima erit QC in qua centrum, minima reliqua QE: aliarum vero
fig. 15. propinqvor illi, quæ per centrum ducitur, v. g. QP, major quã QR.

Productis PQ *ad* O, RQ *ad* S, *demissisq; ex centro perpendicularibus* AT, AU, *quarum* AT, *minor quàm* AU: *erit* EC *major*
δ. cor. 3. l. h. (δ) OP & OP *major* (δ) SR & *quia* EA ∞ AC, OT ∞ (ε) TP &
ε. cor. 1. l. h. SU ∞ (ε) UR *erit* & AC *major* OT, *multò magis* QC *major* OQ;
ζ. II. h.
η. cor. 3. l. h & TP *major* SU, *multò magis* QP *major* SQ.

Sit ergo EQ ∞ a, QC ∞ b, OQ ∞ c, QP ∞ d, SQ ∞ e, QR ∞ f: *ubi notemus* b *esse maj. quàm* c, & d. *quàm* e.

Est a. (ζ) ab)o cd	*At* a + b (η) *maj.* c + d.	*At* c + d (η) *maj.* e + f
a)o $\frac{cd}{b}$	*Erg.* b + $\frac{cd}{b}$ *maj.* c + d	$\frac{ef}{d}$ + d *maj.* e + f
Et quia cd)o ef	bb + cd *maj.* bc + bd	ef + dd *maj.* ed + df
c)o $\frac{ef}{d}$	bb - bc *maj.* bd - cd	dd - ed *maj.* df - ef
	Et b. *maj.* d.	d *maj.* f.
	Est autem ab)o cd	*Erat v.* cd)o ef
	Erg. eb *maj.* ab	*Ergo* ed *maj.* cd
	Et c. *maj.* a.	*Et* e *maj.* c. Q. E. D.

Coroll.

1. Ex puncto Q extra centrum, ad peripheriam duæ tantum ponuntur rectæ æquales. E. 7. III.

Propter omnimodam enim congruentiam semicirculorum ELC, ERC (α) *ex quolibet puncto diametri v.g.* Q *eædem vel æquales lineæ ad unum semicirculum duci possunt, quæ ad alterum: atqui earum, quæ ex eodem puncto* Q *ad eundem semicirculum cadunt, nulla alteri est æqualis* (β) *Unde duæ tantum æquales rectæ ex puncto extra centrum, ducuntur ad Circulum.* α. cor. 3. defin. h. β. III. h.

2. Ex qvo seqvitur, si ex puncto aliqvo in Circulo, ad peripheriam tres pluresve cadant rectæ æqvales, illud esse centrum Circuli. E. 9. III.

IV. Anguli ADB, ACB. in eodem circuli segmento æqvales sunt. E. 21. III. fig. 16.

Sit enim AE ꝏ a EC ꝏ b. EB ꝏ c ED ꝏ d: *Erit* (δ) δ. II. h.

ab ꝏ ed

Et $\frac{a}{d}$ ꝏ $\frac{c}{b}$ *h. e.* (ε) AE *est ad* ED: *uti* EB *ad* EC. ε. def. 4. proleg.

Sed & angulus DEA *est* ꝏ (ζ) *angulo* CEB: *Unde* (η) *triangula* AED, BEC *sunt similia, & hinc* (ϑ) *angulus* ADB *est* ꝏ *ang.* ACB. Q. E. D. ζ. II. p. 1. η. XV. p. 1. ϑ. def. 6. sect. II. p. 1.

Coroll.

1. Qvadrilateri ABCD circulo inscripti, anguli, qvi ex adverso sunt, ADC, CBA, (DCB, BAD) sunt ꝏ 2 rectis. E. 22. III.

Quia enim ductis diagoniis DB, AC, *omnes anguli △li* ADC (κ) ꝏ 2 *rectis: angulus autem* DBC ꝏ (λ) *ang.* DAC *& ang.* DBA ꝏ (λ) DCA: *erunt & anguli* ADC *&* ABC ꝏ 2 *rectis.* Q. E. D. κ. VII. p. 1. λ. IV. h.

2. In Circulo angulus ad centum AFB duplex est anguli ad peripheriam, ACB vel ADB. E. 20. III.

Sit enim ang. FBC ꝏ (α) FCB ꝏ a, AFB ꝏ x. α. IX. p. 1.

Erit (β) *& ang.* ADB ꝏ a. *Et* x ꝏ (γ) 2 a. Q. E. D. β. IV. h. γ. cor. 1. VII. p. 1.

3. In æqvalibus Circulis æqvales anguli æqvalibus peripheriis insistunt, sive ad centrum constituti sint, sive ad peripheriam: & vice versa. E. 26. 27. III

 De

δ. cor. 3. *De angulis ad centrum dubium non est (δ): unde idem in an-*
defin. h. *gulis ad peripheriam, quia hi illorum dimidii sunt (ε) obtinebit.*

ε. cor. 2. V. Si ex puncto H extra Circulum sumto, ducantur rectæ qvot-
IV. h. libet HC, HB &c. utcunqve in concavam peripheriam cadentes;
fig. 16. erunt rectangula AHB, DHC, sub totis rectis & partibus illarum extra circulum comprehensa æqvalia.

Ductis n. AD *&* BC: *erit* HBC + ADC ∞ *ang* ADH + ADC
α. cor. 1. ∞ (α) 2 *rectis*; *& hinc ang.* ADH ∞ HBC: *sic & ang.* HCB +
IV. & l. p. 1. DAB ∞ DAH + DAB ∞ (α) 2 *rectis, & hinc* DAH ∞ HCB; *angu-*
β. XI. p. 1. *lus verò* H *communis est. Unde* △la HDA & HBC (β) *similia sunt.*

Sit ergo DH ɔ a, AH ɔ b, BA ɔ c, CD ɔ d. *Erit* (β)

HD		HB		AH		HC
a	*ad*	b + c:	*uti*	b	*ad*	a + d

γ. 2. prole- *Ergo* (γ) *rectang.* DHC ɔ aa + ad ∞ bb + bc. ɔ *rect.* AHB.
gom. Q. E. D.

Coroll.

E. 36. III. 1. Quod si ergo HB circulum tangeret, foret AB ∞ *c* ∞ *o* adeoque □mum EHD ∞ *aa* + *ad* ∞ *bb* □to HB. Et vicissim si *aa* +
E. 37. III. *ad* ∞ *bb*: erit *c* ∞ *o* id est HB circulum ad B continget.

2. Inter rectas ex puncto H extra Circulum sumto in convexam
E. 8. III. peripheriam utcunque cadentes, minima est ea, quæ est inter punctum H & diametrum GI; aliarum autem qvæ minimæ propinquior est ut HD, remotiore AH semper minor est. Inter eas autem quæ in concavam peripheriam cadunt ex puncto H, maxima est quæ per centrum transit; aliarum (γ) ea quæ centro propinquior HC, remotiore HB semper est major.

Sit HI *vel* HD ∞ a: IG *vel* DC ∞ b, BA ∞ c, AH ∞ d: *dico* (1) d *majus esse quàm* a, *&* (2) a + b *majus esse*, c + d.

δ. V. h. *Est enim* (δ) aa + ab ∞ cd + dd. *At* b (ε) *major est* c.
ε. cor. 3. l. h. *Ergo* bd + dd *majus est* aa + ab

dd *maj.* -bd + aa + ab

d *maj.* $-\frac{1}{2}$ b + γ $\frac{1}{4}$ aa + ab + aa,

hoc est d *majus est*, a. Q. E. D.

2 *Est*

2. *Est rursus* (δ) $aa + ab \supset cd + dd$. *At per hanc* d *majus est* a.

Ergo $\overline{ad + db}$ *majus* $\overline{cd + dd}$

$a + b$ *maj.* $c + d$. Q. E. D.

VI. Angulus in Semicirculo ABC rectus est. E. 31. III.

Sit ang. rectus $\supset$ a : *ductoque radio*, FB, *ang.* FAB $\supset$ (ζ) AFB ∞ b, fig. 16.

ang. FBC ∞ (ζ) FCB ∞ c. *Erunt ergo* (η) $\overline{2b + 2c} \infty 2a$ ζ. IX. p. 1.

Et ang. ABC ∞ $b + c \infty a$. Q.E.D. η. VII. p. 1.

Coroll.

Ergo angulus in ſegmento minori ABG, major recto eſt (totum parte) & in majori ſegmento ABD, minor (pars toto). E. 31. III.

VII. Si ex quovis puncto E circuli PEC, in diametrum demittatur perpendicularis ED: fiatque uti ſegmentum inter centrum & perpendicularem interceptum, AD, ad ſegmentum à radio abſciſſum DC; ſic radius AC ad quartam CF, atque ex F ducatur recta EF; illa circulum in puncto E continget. fig. 17.

Ductâ enim IHG, ED *parallela*, *ſit* DC ∞ y α. l. h.

CF ∞ z *Erit* (α) ED ∞ $\sqrt{2ay-yy}$

DF ∞ x ∞ $z + y$ *Et* (α) HG ∞ $\sqrt{2ay-yy+2ey-2ae-ee}$

DG ∞ e *Fiat autem* e ∞ o *ut* IG *ſit* ∞ HG ∞ ED.

Unde ob triang. ſimilia EDF, IGF *erit* (β) β. XI. p. 1.

$\square$*tum* ED *ad* $\square$*tum* IG ∞ $\square$ HG : *uti* $\square$DF *ad* $\square$*tum* GF.

$$\overline{2ay-yy \quad 2ay-yy+2ey-2ae-ee : xx \quad xx-2ex+ee}$$ γ. 2. proleg.

Eritque (γ) $2ayxx-4aexy+2aeey-xxyy+2eyyx-eeyy \infty$

$$\infty \overline{2ayxx-yyxx+2eyxx-2aexx-eexx}$$

$$\overline{2aey-4axy+2yyx-eyy \infty 2yxx-2axx-exx}$$

Et quia e ∞ o. $$\overline{2yyx-4axy \infty 2yxx-2axx}$$

$$\overline{yy-2ay \infty yx-ax}$$

$$x \infty \frac{2ay-yy}{ay} \infty z + y$$

$$\overline{2ay-yy \infty ay+az-yy-yz}$$

$$\frac{ay}{a-y} \infty z.$$

Hoc eſt a-y *ad* y *uti* a ad z. Q. E. D.

Coroll.

E.16.18.19. III. 1. Radius AE circulum EHC ad angulos rectos in puncto E secat.

fig. 17. *Ponatur enim* AE $\propto x$, *radius* $\propto a$, DC $\propto y$, ED $\propto \sqrt{2ay-yy} \propto z$:

α. VII. h. *Erit* AD $\propto \sqrt{xx-zz}$ & CF(α) $\propto \frac{ay}{a-y}$ *seu* (*facto* $a-y \propto t$) CF $\propto \frac{ay}{t}$ &

DF $\propto \frac{ty \pm ay}{t}$, AF $\propto \frac{ty \pm ay}{t} \pm \sqrt{xx-zz}$. *Dico aut.* x *esse* $\propto a$.

$$\textit{Quia}\ \Box\ \mathrm{ED} \propto zz$$

$$\Box\ \mathrm{DF} \propto \frac{ttyy \pm 2atyy \pm aayy}{tt}$$

β. XIII. p. 1.

$$\textit{Ergo}\ (\beta)\ \Box\ \mathrm{EF} \propto \frac{ttyy \pm 2atyy \pm aayy}{tt} \pm zz$$

α. I. h.

$$\textit{Atqui}\ \Box\ \mathrm{AF} \propto \frac{ttyy \pm 2atyy \pm aayy}{tt} \pm xx-zz \pm \frac{2ty \pm 2ay}{t}\sqrt{xx-zz}$$

$$\textit{Ergo}\ (\beta)\ \Box\ \mathrm{AE}\ \textit{seu}\ xx \propto xx - 2zz \pm \frac{2ty \pm 2ay}{t}\sqrt{xx-zz}$$

β. XI. p. 1. *Restitutoq; valore* t & z

$$2zz \propto \frac{2ty \mp 2ay}{t}\sqrt{xx-zz}$$

γ. 2. proleg.

$$4ay-2yy \propto \frac{4ay-2yy}{a-y}\sqrt{xx-2ay+yy}$$

$$a-y \propto \sqrt{xx-2ay+yy}$$

$$aa-2ay+yy \propto xx-2ay+yy$$

E.11.12.III. *Ergo* $a \propto x$. Q. E. D.

2. Si duo Circuli se mutuò tetigerint, recta quæ ad eorum centra adjungitur, in contactum circulorum cadet.

fig. 17. *Tangant se mutuò circuli* ECK & TK *in puncto* K: *concipiaturque recta* MQ *circulos utrosque in eodem puncto* K *tangens*: *ubi patet, cùm utriusque circuli* ECK & TK *radii* AK, NK *circulum,*

γ. cor. 1. VII. h. *seu ejus tangentem* MQ *perpendiculariter* (γ) *secent, eos in unam rectam cadere.* Q. E. D.

E. 13. III. 3. Circulus TK. Circulum ECK in uno tantum puncto A tangit.

Cum enim utriusque circuli radii AK, NK *tangenti* MKQ *perpendiculariter insistant* (γ) *idque in uno tantum puncto fieri possit* (*cum una tantùm ex puncto in subjectam rectam cadat per pendicularis hoc est brevissima* (α)) *patet propositum.* fig. 17. γ. cor. I. VII. h. α. IV. p. I.

VIII. Anguli OEP & FEP, quos secans PE cum tangente OF facit, æquales sunt iis, qui in alternis circuli segmentis sunt, angulis R & S. E. 32. III. fig. 17.

Ducta enim diametro EK, *cum hæc tangenti* FO (δ) *perpendicularis sit: erit ang.* (ε) KPE ∞ OEK ∞ (ζ) PEK + PKE, *adeoq;* PKE ∞ (η) PRE ∞ OEP. *Porrò ang.* OEP + FEP ∞ (ϑ) ESP + ERP; *hoc est, quia* PRE ∞ OEP, *etiam ang.* FEP ∞ ESP. Q.E.D. δ. cor. I. VII. h. ε VI. h. ζ. VII. p. I. η. IV. h. ϑ. cor. I. IV. h.

SECTIO II.

De Superficie Circuli.

Definitio Secunda.

SI recta AB, manente uno puncto A fixo circum agatur ita ut omnes ejus rectæ puncta v. g. AFGHB circulos describant. orietur *superficies circularis* BECD, quæ & ipsa *Circulus* dicitur. fig. 13.

THEOREM.

IX. Area Circuli BECD æqualis est triangulo rectangulo sub radio AB & peripheria BCED comprehenso. Archim. de Circul. dimens. prop. I.

Sit radius ∞ a, *peripheria* BECD ∞ x: *dico aream hujus circuli esse* ∞ $\frac{ax}{2}$

Sit enim recta cujus rotatione circulus fit AB ∞ a, *eiq; ad* B *perpendiculariter applicata* BZ ∞ *peripheriæ* BECD ∞ x: *juxta quam deinde & reliquæ peripheriæ à reliquis dictæ rectæ* AB *punctis* H, G, F, &c. *descriptæ*, HY, GX, FV, *perpendiculariter applicentur. Cùm ergo semper sint radii suis peripheriis proportionales, scilicet* AB *ad* BZ; *uti* AH *ad* HY; *& uti* AG ad GX; *& uti* AF, ad FV: *patet si puncta* AV, AX, AY, AZ, *conjungantur fore triangula* AFV, AGX, AHY, ABZ *similia* (*quippe quæ habent* fig. 18.

α. XV. p. 1. *bent latera circa eosdem angulos* F, G, H, B *proportionalia* (α) & *hinc angulum* FAV ∞ *ang.* GAX ∞ *ang.* HAY ∞ *ang.* BAZ *hoc est puncta* V, X, Y, Z, *in unam rectam* AZ *cadent. Ex quo consequitur summam omnium peripheriarum à singulis punctis rectæ* AB *descriptarum hoc est totam superficiem Circuli* BECD *constituere*

β. XVII. p. 1 *triangulum rectangulum* ABZ ∞ (β) $\frac{ax.}{2}$ Q. E. D.

Coroll.

E. 2. XII. Circuli sunt inter se ut quadrata diametrorum.

Sint duo circuli, & unius eorum peripheria ∞ x, *alterius* ∞ y, *unius radius* ∞ a *alterius* ∞ b:

γ. IX. h. *Erit unius area* ∞ (γ) $\frac{ax}{2}$ *alterius* ∞ (γ) $\frac{by}{2}$: *quæ sunt in*

δ. 3. proleg. n. 2. *ratione* $\frac{ax}{by}$. *Atqui uti* a *ad* x: *sic* b *ad* y & *vicissim* (δ) *uti* a *ad* b:

sic x *ad* y: *h. e.* $\frac{a}{b} \infty \frac{x}{y}$

Ergo $\frac{ax}{by} \infty \frac{aa}{bb} \infty \frac{4aa}{4bb}$ Q. E. D.

SECTIO III.

De Cono, Cylindro & Sphæra.

Definitiones tertiæ.

fig. 19. 1. SI recta AB indefinitè protensa, manente uno puncto, A, fixo circa circulum BCDE, in alio plano constitutum revolvatur, ita, ut aliquod semper lineæ mobilis AB punctum, peripheriam BCDE lambat vel stringat; eo motu superficies Conica describitur quodque hac superficie continetur solidum, *Conus* dicitur.

2. In eo punctum A *vertex*, circulus BCDE *basis* & perpendicularis ex vertice in planum circuli cadens. *altitudo* appellatur.

3. Si

3. Si circulus BCDE juxta lineam rectam immotam BF, quomodocunque plano ejus ad B insistentem, directò attollatur ita, ut in omni elevatione maneat sibi ipsi parallelus nec ullo modo rotetur, quæ eo motu describitur, figura solida *Cylindrus* dicitur. fig. 19.

4. Ubi circuli BCDE, FG *basis*: & recta ex quovis puncto unius basis in planum alterius baseos dimissa, *altitudo* dicitur.

5. Si semicirculus DCB circa diametrum DB revolvatur donec redeat in locum, ubi motum suum inchoavit, describetur figura solida BCDE, quæ *Sphæra* appellatur. fig. 20.

THEOREMATA.

X. Solidum Coni ABD æquale est basi BCDE in tertiam partem altitudinis, aut altitudini in tertiam partem baseos ductæ.

Sit enim basis BCDE ∞ x, *altitudo* AL ∞ a, *Diameter* BD ∞ b: *dico Conum* ABD *esse* ∞ $\frac{1}{3}$ ax. fig. 19.

Conus ABD *constituitur ex indefinitè multis circulis, circulo* BCDE *parallelis & tot numero, quot puncta altitudo* AL *continet: utut enim Conus sit obliquus tot semper tantùm Circuli, id est superficies Circulares in eo continentur, quot puncta in altitudine. Omnium autem horum Circulorum diametri sibi paralleli sunt &* △*lum* ABD *constituunt & cùm sint æquidistantes proportionales arithmeticè exsistunt.* (*v. demonstr.* Theor. 25. p. I. h.) *Quia ergo omnes Circuli sunt inter se* (α) *ut quadrata diametrorum, & vicissim* (β) *erunt etiam, uti quadratum diametri* BD ∞ bb *ad Circulum* BCDE ∞ x: *sic* (γ) *omnia quadrata omnium eorum, quæ diximus diametrorum ad omnes Circulos constituentes hunc conum, h. e. ad ipsum Conum* ABD. *Facilè autem juxta regulam Bacheti in prolegomenis demonstratam, summa quadratorum ex his diametris ortorum invenitur. Sunt enim omnes diametri in progressione arithmetica, & terminus minimus ∞ puncto A ∞ differentiæ ∞* o, *maximus ∞* b, *numerus terminorum ∞* a. *Unde quæsitorum quadratorum summa est ∞* $\frac{1}{3}$ abb. *Et hinc uti* □*tum* BD ∞ bb *ad Circulum* BCDE ∞ x *sic summa omnium illorum quadratorum ∞* $\frac{1}{3}$ abb *ad Conum ∞* $\frac{1}{3}$ ax. Q. E. D.

α. cor. IX. h.
β. 3. prol. n. 2.
γ. 3. prolog. 5.

XI. Solidum Cylindri FGBD est æqvale basi BCDE ductæ in altitudinem AL.

Sit basis BCDE ∞ x *altitudo* AL ∞ a : *dico Cylindr.* FGBD ∞ ax.

Solidum enim hoc est aggregatum tot circulorum æqualium, tum inter se, tum basi BCDE, *quot inter utramq; basin consistere possunt, h. e. quot puncta continet altitudo. Ergo patet propositum.*

Coroll.

E. 10. XII. 1. Omnis Conus est tertia pars Cylindri ejusdem baseos & altitudinis.

E. 11. 13. 14. XII. 2. Omnes Coni & omnes cylindri æqvialti sunt ut bases & vice versa.

Sint enim duorum Conorum aut Cylindrorum bases, unius ∞ x, *alterius* ∞ y, *altitudo autem communis* ∞ a. *Erunt* (α)

α. X. h. β. XI. h. *Coni* $\frac{1}{3}$ ax *&* $\frac{1}{3}$ ay : *Cylindri* (β) ax *&* ay : *patetq; propositum.*

E. 12. XII. XII. Coni & Cylindri similes sunt in triplicata ratione diametrorum, qvæ in basibus.

fig. 19. *Sint Coni similes* AHI, & ABD, *in iisq; bases* HI, ∞ y, BD ∞ x, *altitudines* AL ∞ a, AK ∞ b.

Erit Conus AHI ∞ (α) $\frac{1}{3}$ by, ABD ∞ (α) $\frac{1}{3}$ ax: *sintq; diametri* HI ∞ c, BD ∞ d.

γ. cor. IX. *Cùm coni ii sint in ratione* $\frac{by}{ax}$: *sitq;* (γ) $\frac{y}{x} \infty \frac{cc}{dd}$ *nec non* $\frac{b}{a} \infty \frac{c}{d}$

h. (*est enim tam* b *ad* a *quàm* c *ad* d, *uti* (δ) AH *ad* AB)

δ. XI. p. 1. *erit* $\frac{by}{ax} \infty \frac{c^3}{d^3}$: *Idem ergo obtinet in cylindris similibus*, by *&* ax. Q. E. D.

XIII. Coni & cylindri æqvales habent altitudines & bases re-

E. 15. XII. ciprocè proportionalia.

Sint enim duo Coni æquales $\frac{1}{3}$ ax & $\frac{1}{3}$ by, *& duo Cylindri* ↄles ax *&* by; *ubi* a & b *sint altitudines*, x *&* y *bases.*

Quia est $\frac{1}{3}$ ax ↄ $\frac{1}{3}$ by *vel* ax ↄ by.

Erit $\frac{a}{b}$ ↄ $\frac{y}{x}$. *h. e.* a *ad* b, *uti* y *ad* x. Q. E. D.

XIII. So-

XIV. Solidum sphæræ æquale, est quadruplo circuli maximi ducto in sextam partem diametri ejusdem.

Sit sphæra BCDE: *in eàque circulus maximus* BCDE ∞ x, *diameter ejus* BD ∞ EC ∞ 2a, *radius* AB, AC, AE, AD ∞ a: *dico sphæram esse* ∞ $1\frac{1}{3}$ ax. fig. 20.

Sphæra hæc constituitur ex indefinitè multis sibi incumbentibus Circulis ef, gh, ik, lm &c. *tot numero, quot diameter* BD *puncta continet, quorum omnium radii sunt perpendiculares* nf, oh, pk &c. *ex singulis punctis diametri in peripheriam cadentes. Horum Circulorum summam h.e. totam sphæram* BCDE *ut inveniamus, consideremus primò semisphæram* EBC. *Hic cùm circuli sint inter se, (α) ut quadrata diametrorum, & hinc etiam* α. cor. IX.
ut quadrata radiorum & vicissim: erit (β) uti quadratum ra- h.
dii AC ∞ aa *ad circulum* EC ∞ x, *sic summa quadratorum omni-* β. 3. pro-
um radiorum AC, qm, pk &c. *ad omnes Circulos, semisphæram* leg. n. 5.
constituentes EC, lm, ik &c. *h. e. ad totam semisphæram. Nec difficulter summa quadratorum ex his radiis ortorum reperitur. Ductis enim rectis* Am, Ak, Ah, &c. *erunt quadrata, omnium radiorum* AC, qm pk *&c.* ∞ *quadratis* Am, Ak &c. *minus quadrat.* qA, pA &c. *At verò quadrata* AC, Am Ak &c. *sunt tot numero, quot sunt puncta radii* AB ∞ a, *unde summa horum* □*torum est* ∞ a3. *Summa verò quadratorum* Aq, Ap, Ao &c. *juxta regulam Bacheti in proleg. ostensam est* ∞ $\frac{1}{3}$ a3. *Ergo quadrata omnium radiorum* Ac, qm, pk *&c. sunt* ∞ $\frac{2}{3}$ a3. *Hinc cùm sit uti quadr. radii ad Circulum* EC: *sic summa omnium quadratorum* AC, qm *&c. ad totam semisphæram: erit ut* aa *ad* x: *sic* $\frac{2}{3}$ a3 *ad* $\frac{2}{3}$ ax ∞ *semisphæræ, ut sit tota sphæra* ∞ $1\frac{1}{3}$ ax. Q.E.D.

Coroll.

Conus BHI, sphæra BCDE, Cylindrus FGHI, ubi basis coni & cylindri ∞ circulo maximo sphæræ, altitudo eorundem ∞ diametro sphæræ, sunt in ratione, ut 1, 2, 3. Archim. l. 1. de sphær. & Cyl.

Sit enim diameter BD ∞ 2a. *Circulus* IH ∞ *circulo* EC ∞ x: *erit Conus* BIH ∞ $\frac{2}{3}$ ax, *sphæra* BCDE ∞ $1\frac{1}{3}$ ax, *Cylindrus* FGHI ∞ 2ax: *pateté propositum.* prop. 32. & coroll.

XV. Cylindri FGBD ſuperficies convexa æqvatur rectangulo ſub latere FB & perimetro baſeos BCDE.

fig. 19. *Sit* FB ∞ a, *perimeter* BCDE ∞ x: *dico ſuperficiem convexam Cylindri* FGBD *eſſe* ∞ ax.

Patet enim hanc ſuperficiem conſtitui ex indefinitè multis perimetris ſibi incumbentibus & perimetro BCDE *æqualibus tot ſc. numero quot puncta continet latus cylindri* FB ∞ a: *h. eſt eſſe* ∞ ax. Q. E. D.

Archim. l. 1. de ſphær. & Cylind. prop. 13. Congruit cum hac Archimedea reg. ſuperficiem convexam cylindri FGBD æqvari Circulo, cujus radius eſt media proportionalis inter latus FB & baſeos diametrum BD.

α. cor. IX. h. *Sit enim diameter* BD ∞ b, *erit media proport. inter* FG ∞ a & BD ∞ b, ∞ $\sqrt{ab}$, *adeoq́; diameter circuli ſuperficiei huic æqualis* ∞ $2\sqrt{ab}$. *Sunt autem circuli* (α) *ut à diametris quadrata & viciſſim, unde erit uti quadratum* BD ∞ bb *ad circulum* BCDE

β. IX. h. ∞ (β) $\frac{bx}{4}$ *ſic quadratum diametri* 4 ab, *ad* ax.

XVI. Superficies convexa Coni æqvilateri (ſeu cujus vertex centro baſeos perpendicularis) ABD eſt ∞ triangulo rectangulo ſub latere AB & perimetro baſeos BCDE comprehenſo.

Sit latus AB ∞ a, *perimeter baſeos* BCDE ∞ x: *dico ſuperfic. convexam Coni* ABD *eſſe* ∞ $\frac{ax.}{2}$

Superficies hæc conſtat ex tot perimetris, quot puncta continet latus AB.

fig. 19. & 18. *Concipiatur ergo ipſa AB in directum extendi ejusque ſingulis punctis perpendiculares rectæ applicentur ſingulis peripheriis hujus ſuperficiei æquales*, v. g. BZ, HY, GX, FV: *applicentur deinde eidem* AB, *rectæ* BR, HQ, GP, FO *æquales ſingulæ ſingulis in cono perimetrorum radiis* BR *ipſi* BL, HQ *ipſi* qr, GP *ipſi* HK, FO *ipſi* mn. *Quo facto cùm rectæ illæ æqualiter à ſe diſtantes æqualiter increſcant h. e. ſit ut* AF *ad* FO, *ſic* AG *ad* GP, *ſic* AH *ad* HQ &c. *liquet puncta* O, P, Q, R, *incidere in unam rectam* AR (γ) *adeoq́; planum* ABR

γ. v. dem. propoſ. IV. h. *erit triangulum, quod poſita* BR ∞ b, *erit* ∞ $\frac{1}{2}$ ab. *Unde fa-*

ci-

cilè Conica superficies eruitur. Est enim uti radius LB $\propto$ BR $\propto$ b *ad perimetrum* BCDE *seu* BZ $\propto$ x *sic triangulum* ABR $\propto \frac{1}{2}$ ab *ad superficiem quæsitam* $\propto \frac{1}{2}$ ax. Q. E. D.

Congruit cum hac Archimedea reg. superficiem convexam coni æqvilateri æqvalem esse circulo, cujus radius est media proport. inter latus coni, radiumqve baseos. Arch. de Sphær. & Cyl. l.1.pr. 14.

Coroll.

Coni æqvilateri ABD superficies convexa est ad basin BCDE; uti latus coni *AB*, ad radium baseos *BL*. Arch. d. l. pr. 15.

Sit enim AB $\propto$ a. *BL* $\propto$ b. *Perimetur BCDE* $\propto$ x: *erit Circulus BCDE* $\propto$ (δ) $\frac{1}{2}$ bx: *superf. conica* (ε) $\propto \frac{1}{2}$ ax: *patetq; propositum.* δ. IX. h. ε. XVI. h.

XVII. Superficies Sphæricæ sunt inter se ut à diametris qvadrata.

Sint duæ Sphæræ, BCDE, GIKL: dico eas esse inter se ut □ *DB ad* □ *KG.* fig. 13.

Constituitur superf. omnis sphæræ ex tot indefinitè parvis perimetris quot puncta continet semiperipheria, cujus revolutione generatur (ζ) *Atqui peripheria omnis polygonon est infinitorum laterum: quorum tamen in perimetro majori non major est numerus, quàm in minori. Uterque enim tam minor* GIKL, *quàm major* BCDE *tot continet latera indefinitè minuta, quot numero sunt puncta per quæ radii*, AE, AI *à quibus describuntur* (η) *transeunt: simulac enim* AE *tantillum movetur, non minus* I *è sua statione discedit ac ipsum* E, *licèt latera perimetri unius* BCDE *majora sint quam latera alterius* GIKL. *Unde cùm sint perimetri singuli inter se uti diametri seu radii erunt etiam* (ϑ) *omnes peripheriæ sphæræ* BCDE *h. e. ipsa sphæra* BCDE, *ad omnes peripherias sphæræ* GIKL, *h. e. ad ipsam sphæram* GIKL: *uti omnes radii, quibus descripti perimetri minoris sphæræ, h. e. uti semicirculus* IGL, *ad omnes radios omnium perimetrorum sphæræ* BCDE, *h. e ad semicirculum* EBC *sive uti* (α) *à diametris quadrata: semicirculi enim sunt uti Circuli: (dimidia ut tota.)* Q.E.D. ζ. def. 5. h. η. def. 1. Sect. 1. h. ϑ. 3. proleg. n. 5. α. cor. IX. h.

XVIII. Sphæræ BCDE superficies convexa est æqualis qvadruplo Circuli maximi ejusdem. Arch. de sph. & Cyl. l. 1. pr. 31.

Sit Circulus maximus ∞ x, *radius* AB ∞ a. *superficies totius sphæræ* BCDE ∞ y: *dico* y ∞ 4x.

fig. 13. *Ipsa sphæra constat ex indefinitè multis superficiebus sphæricis* BCDE, HMNO, GIKL &c. *tot scilicet numero, quot sunt puncta radii* AB ∞ a. *Sunt a. superficies sphær. inter se uti à diametris (aut etiam radiis) quadrata & vicissim. Unde si fiat uti quadratum radii* AB ∞ aa *ad superf. sphær.* BECD ∞ y, *sic summa quadratorum ex omnibus radiis superficierum sphæram constituentium ortorum, ad quartum; erit hoc quartum ∞ solido sphæræ. Cum ergo summa eorum quadratorum sit ex reg. in prolegom. ostensa* ∞ $\frac{1}{3}a^3$ *erit ipsa Sphæra* ∞ $\frac{1}{3}$ay. *Eadem Sphæra erat su-*
β.XIV.h. *prà* (β) ∞ $1\frac{1}{3}$ax *Ergo* $\frac{1}{3}$ ay ∞ $1\frac{1}{3}$ ax.

Et y ∞ 4x. Q. E. D.

MEMBR. II.

SECTIO I.

De Parabola, Ellipsi & Hyperbola.

Definitiones Primæ.

1. SI duæ rectæ AB, AC se intersecent ad angulos rectos in puncto A & AB versus D, AC vero utrinque ad E & F. producta sit; ponaturque AB perpendiculariter moveri per AC, v. g. versus E & eodem tempore AC quoque perpendiculariter descendere versus G, hac ratione, ut in omni intersectionis puncto, scilicet H, longitudo transmissa per AC & AB, h. e. AD, & DH atque ipsa AB sint continuè proportionales: linea Curva AHS ejusmodi intersectione in plano descripta dicitur *Parabola*. fig. 21.

2. In qua punctum A *vertex*; AG *axis* vel *diameter*; HD autem rectæ AC parabolam in vertice A contingenti parallela, *ordinatim* diametro *applicata*, AB *latus rectum* vel *parameter* dicentur.

Co-

Coroll.

(1) Ex qua generatione facili negotio Parabolæ proprietas perspicitur, scilicet cùm AD, DH & AB sint continuè proportionales, semper esse (α) rectangulum DAB ∞ quadrato DH. h. e. ponendo AB latus rectum ∞ r, diametrum interceptam AD ∞ x & ordinatim applicatam DH ∞ y, esse yy ∞ rx. α. Cor. 2. proleg. Ap. Perg. 11. I. Con.

(2) Quod si AB moveatur eadem lege versus F, uti motam concepimus versus E, patet propter eandem diametrum interceptam AD, esse KD ∞ DH, adeoque applicatam quamlibet v. g. KH utrinque Parabolâ terminatam ab axe aut diametro dividi bifariam.

(3) Constat, in parabola quadrata ordinatim applicatarum, v. g. DH, LM, esse interceptis diametris AD, AL proportionalia. Apoll. 20. I. Con.

Ponatur AL, ∞ v, LM ∞ z, *&* AB ∞ r, AD ∞ x, DH ∞ y: *dico* zz *esse ad* yy; *uti* v *ad* x.

Est enim zz ∞ (α) rv, *&* yy ∞ (α) rx.

Ergo zz (rv) *ad* yy, (rx); *ut* v *ad* x. α. def. 1. cor. 1.

3. Si dato triangulo æquicruro ABC, cujus latera BA & CA producta, latus BA circa punctum fixum B & latus CA circa punctum fixum C versus eandem partem rotentur ut semper se intersecent uti in F, & quantum uni lateri decedit v. g. FE æquetur ei, quod alteri accedit: linea curva AFH quæ hac intersectione in plano describitur dicitur *Ellipsis*. fig. 22.

4. In qua punctum L, ubi perpendicularis ALK trianguli basin secat vocatur *Centrum*, linea GH utrinque in curva terminata & per puncta B, C, transsiens, *axis*: & hanc bisecans ad ang. rectos ALK *axis priori conjugatus*, & omnes huic & Tangenti curvam in G parallelæ, *ordinatim applicatæ* dicuntur.

Coroll.

Quia KG eodem modo describitur ac AG, hæc cum illa congruet adeòque ordinatim applicatæ utrinque in Ellipsi terminatæ MN &c. nec non omnes rectæ M*a* &c. per centrum transeuntes & utrinque in curva terminatæ, ab axe bifariam dividuntur.

5. Si dato triangulo æquicruro ABC, divisaq; basi bifariam in D & productis his rectis indefinitè, EA circulariter rotetur circa punctum

ctum A, ac eodem tempore producta utrinque BC perpendiculariter intra latera BF & CG descendat, hac conditione ut BD semper sit media proportionalis inter segmenta IL & LK per punctum intersectionis L facta: quæ per punctum hoc L describitur Curva DL, dicetur *Hyperbola*.

6. In qua punctum A *Centrum*, AE secans BC ad angulos rectos *axis*, & punctum N *vertex*, rectæ LM, MN, ipsi AB parallelæ *ordinatim applicatæ* ad diametrum; BF, CG hyperbolæ *Asymptotæ*, AD *semissis lateris transversi*, & OD *latus transversum*, seu diameter transversa, AB a. diameter *conjugata* appellatur.

Coroll.

1. Hinc rectarum asymptotis terminatarum IK rectangula, quæ
Apoll. 10. II. Con. fiunt ex earum segmentis IL, LK semper sunt æqualia. sunt enim singula æqualia quadrato BD ex generatione.

2. Si diameter AE eadem lege versus alteram partem rotetur punctum N describet Hyperbolam DN, quæ cum priori DL congruet, & hinc applicatæ hyperbolâ terminatæ LN à diametro DM dividuntur bifariam.

Apoll. I. 14. II. Con. 3 Hyperbola DT indefinitè protensa semper magis ac magis accedit ad asymptoton AF, nunquam tamen eam tangit aut secat.

THEOREM.

XIX. Si sumto ubivis in Parabolæ diametro puncto L, cui ordinatim applicetur LM, & diameter AL extra Parabolam ad N ita continuetur ut AL sit ∞ AN: recta NM ducta parabolam in puncto M continget.

Sit enim NL ∞ x, AL ∞ y DL ∞ a; *erit* DN ∞ x - a *&* AD ∞
fig. 21. y-a, *& sit* a ∞ o, *ut* HD *sit* ∞ OD ∞ LM.

Quia □ LM *est ad* (α) □*um* HD *sive* OD; *uti* AL *est ad* AD;
α. Def. 1. l. cor. 1. h. m. *& uti* □*ũ* LN *ad* □*ũ* DN; *uti* AL *ad* AD: *sic* □NL *erit &* (γ) *ad* □DN

h. e. uti y *ad* y - a: *ita* xx *ad* xx - 2ax + aa.

γ. 2. prolog. *Ergo* (δ) xxy - 2axy + aay ∞ xxy - axx.

δ. 2. prolog. 2xy - ay ∞ xx *& quia* a ∞ o

2xy ∞ xx

adeoq; 2y ∞ x. Q. E. D.

XX. Si

XX. Si à quolibet puncto M in parabola AM ducatur recta MP parallela Diametro AG: erit MP sic ducta ejusdem Parabolæ diameter, verticem habens M & ordinatim applicatas SH, AT fig. 21.
rectæ NM Parabolam in vertice M contingenti parallelas.

Concipiantur ex punctis H, M, S *ordinatim applicatæ diametro* AX: HD, ML, SG, *ducaturque iis* QV *parallela.*

Sitq; AL ∞ a ∞ (α) AN: *adeoq;* NL ∞ VR ∞ 2a α. XIX. h.
LM ∞ QV ∞ b
MQ ∞ RN ∞ LV ∞ c, *& hinc* AV ∞ a + c
DV x & GV ∞ y.

AL *est ad* (β) AD: *uti* □um ML *ad* □um HD. *Et* AL (β) *est ad* β. Cor. 3.
AG; *uti* □um ML *ad* □um SG. *h. e.* a *ad* a + c-x; def. 1. 2. h.
ut bb *ad* ? bb,, $\frac{a+c-x}{a.}$ a *ad* a + c + y : *ut* bb ? bb,, $\frac{a+c+y}{a}$

& (γ) NL *ad* LM: *uti* DR *ad* DH. *Et* NL (γ) *ad* LM: *ut* GR *ad* SG γ. XI.
h. e. 2a *ad* b: *ut* 2a-x ? $\frac{2a-x}{2a}$,,b 2a *ad* b: *ut* 2a + y ?, $\frac{2a+y}{2a}$,,b p. 1.

$\overline{\qquad\qquad}\,\square$ $\overline{\qquad\qquad}\,\square$

bb,, $\frac{a+c-x}{a}$ ∞ $\frac{4aa-4ax+xx}{4aa}$,,bb. bb,, $\frac{a+c+y}{a}$ ∞ $\frac{4aa+4ay+yy}{4aa}$,,bb

4aa+4ac-4ax ∞ 4aa-4ax+xx 4aa+4ac+4ay ∞ 4aa+4ay+yy

4ac ∞ xx 4ac ∞ yy

2γac ∞ x 2γac ∞ y

Ergo x ∞ y *& hinc* (γ) HQ ∞ QS.

Porrò diximus (γ) NL *ad* LM: *uti* GR *ad* SG, *hoc est ponendo* 2γac ∞ y. 2a *ad* b: *uti* 2a + 2γac ? $\frac{2a+2\gamma ac}{2a}$,,b ∞ SG

Et quia etiam si ponatur MP ∞ f, WX ∞ WA *est* ∞ 2γaf, *erit* & NL: *ad* LM *uti* AX *ad* TX.

hoc est, 2a *ad* b: *ut* 2a + 2γaf ? $\frac{2a+2\gamma af}{2a}$,,b ∞ TX.

Subtrahatur jam ex SG ∞ $\frac{2a+2\gamma ac}{2a}$,,b & TX ∞ $\frac{2a+2\gamma af}{2a}$,,b
LM ⊃ GZ ∞ XY ∞ b, *erit* ZS ∞ 2γabc & YT ⊃ 2γabf.

Sed (β) ZS $\propto \sqrt{2abc}$ *est ad* YT $\propto \sqrt{2abf}$ *uti* QS *ad* PT

δ. Cor. 3. *h. e.* c *ad* f *uti* □*um* QS *ad* □*tum* PT: *adeoq;* (δ) *rectæ*
def. 1. 2. h. QS, PT, *ordinatim applicata ad diam.* MY. Q. E. D.

XXI. In ellipsi quadratum ordinatim axi applicatæ IF, est ad rectangulum GIH sub segmentis axeos GI, IH; uti □tum axeos
fig. 22. GH ad □ axis conjugati *AK*.

Sit BC $\propto$ a, AB $\propto$ AC $\propto$ GL $\propto$ LH $\propto$ b; *erit* GH $\propto$ 2b. IL $\propto$ c:
Ergo BI $\propto \frac{1}{2}a + c$ IC $\propto \frac{1}{2}a - c$ IF $\propto$ y.

$\Box BI : \frac{1}{4}aa + ac + cc \qquad \Box IC \propto \frac{1}{4}aa - ac + cc$

$\Box IF \propto yy \qquad \Box IF \propto yy$

α. XIII. p. 1 $\Box BF \propto \frac{1}{4}aa + ac + cc + yy\,(\alpha) \qquad \Box CF \propto \frac{1}{4}aa - ac + cc + yy\,(\alpha)$

$$BF + FC \propto \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + ac + cc + yy} + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa - ac + cc + yy} \propto 2b$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}aa + ac + cc + yy} \propto 2b - \sqrt{\tfrac{1}{4}aa - ac + cc + yy}$$

$$\tfrac{1}{4}aa + ac + cc + yy \propto 4bb - 4b\sqrt{\tfrac{1}{4}aa - ac + cc + yy} + \tfrac{1}{4}aa - ac + cc + yy$$

$$2b\sqrt{\tfrac{1}{4}aa - ac + cc + yy} \propto 2bb - ac$$

$$aabb - 4abbc + 4bbcc + 4bbyy \propto 4b^4 - 4abbc + aacc$$

$$yy \propto \frac{4b^4 + aacc - aabb - 4bbcc}{4bb.}$$

Id est uti 4bb (□GH) *ad* 4bb-aa (□AK) *sic* bb-cc (□GIH) *ad* yy
β. 3. pro- & *vicissim* (β) *uti* 4bb-aa *ad* 4bb *sic* yy *ad* bb-cc. Q. E. D.
leg. n. 2.

Coroll.

1. Quod si axi seu diametro transversæ GH, & ei conjugatæ *AK*.
apoll. 13. I. quæratur tertia proportionalis HO, quæ *latus rectum* seu *para-*
Cor. *meter* dicitur: erit □ applicatæ IF $\propto$ rectangulo sub latere recto HO & diametro intercepta IH, minus rectangulo QPR.

Sit enim IF $\propto$ y, IH $\propto$ x, GH $\propto$ q. *Lat. rect.* HO $\propto$ r

Ostendimus autem esse $yy \propto \frac{4bb-aa}{4bb}$, bb-cc: *ubi* $\frac{4bb-aa}{2b} \propto r$,

2b $\propto$ q, b-c $\propto$ x, b + c $\propto$ q-x: *unde* $yy \propto \frac{rx - rxx.}{q}$ Q. E. D.

2. Un-

2. Unde porro patet qvadrata applicatarum IF, ST esse inter se uti rectangula sub segmentis diametrorum GIH, GSH. Apoll. 21. I. Con.

Sit enim IF ∞ y, ST ∞ z, IH ∞ x, SH ∞ v. *Erit* (γ) γ. Cor. 1. XXI, h.

$$yy\ (\infty \frac{rx-rxx}{q})\ ad\ zz\ (\infty \frac{rv-rvv}{q})\ uti\ qx-xx\ ad\ qv-vv.$$ Q.E.D.

XXII. Si sumto ubivis in Ellipsis diametro puncto *B*, cui ordinatim applicetur M*B* & diameter *B*G ad V continuetur, sitque ut distantia puncti applicationis à centro, scilicet *B*L ad diametrum interceptam *B*G; sic residuum tranversæ diametri *B*H, ad diametrum interceptam continuatam BV: recta MV Ellipsin in puncto M continget. fig. 22.

Ductâ XYZ *parall. ad* MB, *sit* BV ∞ x, BG ∞ y BH ∞ z, BZ ∞ a, HZ ∞ z-a, ZG ∞ y $\pm$ a. *Sit autem* a ∞ o *ut* YZ ∞ XZ.

Rectang. HZG *est ad rect.* HBG, *uti* □ ZV, *ad* □ BV (*utrunque enim*(α)*uti* □ XZ ∞ □ YZ *ad* □ MB) α. Cor. 2.

h. e. $yz-ay \pm az-aa$ *ad* yz : *uti* $xx \pm 2ax \pm aa$ *ad* xx XXI. h. &

(γ) $yzxx-ayxx \pm azxx-aaxx \infty yzxx \pm 2ayzx, \pm aayz$ XI. p. 1.

$zxx-yxx-axx \infty 2yz\ x \pm ayz$ γ. 2. proleg.

Et quia a ∞ o $\quad x \infty \frac{2yz}{z-y}$ *sive* $\frac{yz}{\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}y}$:

h. e. BL $\infty \frac{1}{2}z-\frac{1}{2}y$ *est ad* BG ∞ y : *uti* BH ∞ z, *ad* BV ∞ x. Q.E.D.

XXIII. Si à qvolibet puncto Ellipseos M, per centrum L ducatur recta M*a*; erit hæc ejusdem diameter, cujus vertex M, & ordin. applicatæ, *bc*, *b*G, tangenti in M, MV parallelæ.

Sint diametro GB *applicatæ*, KL, MB, *&* c*d*, *hisq; parall. bc.* *Sitq;* BM ∞ a, BG ∞ b, GH ∞ q, BH ∞ q-b ∞ c. BL $\infty \frac{1}{2}$q-b ∞ f, M*b* ∞ g. ML ∞ h, *ba* ∞ 2h-g ∞ k, *b* L ∞ h-g ∞ m. *ed* ∞ x, *e*L ∞ y. fig. 22.

Erit autem (α) BV $\infty \frac{bc}{f}$: *e*B ∞ (β) $\frac{fg}{h}$: *eg* ∞ (β) $\frac{bcm}{hf}$: *adeoq;* α. XX. h.

dg $\infty \frac{bcm}{hf}$-x, L*g* $\infty \frac{bcm}{hf} \pm$ y : *e*G $\infty \frac{fg}{h} \pm$ b : *e*H ∞ c-$\frac{fg.}{h}$ β. XI. p. 1.

Ergo *d*G $\infty \frac{fg}{h} \pm$ b-x *rectangul.* G*d*H $\quad$ LG $\infty \frac{fg}{h} \pm$ b $\pm$ y *rectangul.* GLH

*d*H ∞ c-$\frac{fg}{h} \pm$ x $\quad$ LH ∞ c-$\frac{fg}{h}$-y

$$\infty \frac{ffgk - 2fhmx +\!- bchh - hhxx}{hh} \quad \infty \frac{ffgk -\!+ 2fhmy +\!- bchh - hhyy}{hh.}$$

(*quia* $c - b \infty 2f$, $h - g \infty m$ $2h - g \infty k$)

γ. Cor. 2. *Quia v.* (γ) □GBH *ad* □G*d*H (GLH) *uti* □MB *ad* □*cd* (KL) *sunt* □*ta*

XXI. h. $cd \infty \frac{ffgk - 2fhmx +\!- bchh - hhxx}{bchh}$ „aa KL $\infty \frac{ffgk +\!- 2fhmy +\!- bchh - hhyy}{bchh}$ („aa

Sed & quia (β) BV *ad* MB : *uti dg* (L*g*) *ad dc* (KL) : *eadem* □*ta*

$cd \infty \frac{bbccmm - 2bcfhmx +\!- ffhhxx}{bbcchh}$ „aa. KL $\infty \frac{bbccmm +\!- 2bcfhmy +\!-}{bbcchh.}$ (ffhhxx „aa

His æquatis (*quia* $hh - mm \infty gk$) $xx \infty \frac{bcgk}{hh}$ *ut &* $yy \infty \frac{bcgk}{hh.}$

Ergo ed ∞ x ∞ *e* L ∞ y, *& hinc* (β) K*b* ∞ *bc*.

Quod si pro M*b* ∞ g, *ponatur* M*b* ∞ p, *& pro ba* ∞ k *seu* 2h-g, *ba* ∞ 2h-p, *fiet* □ *k*G $\infty \frac{2hbcp - bcpp}{hh}$: *uti* □ *ed rejecto* k $\infty \frac{2hbcg - bcgg}{hh.}$

Ergo □ kG, *ad* □ ed, *seu inter quæ eadem est ratio* (β) □ *b*G *ad* □ *bc* : *uti* 2hp-pp, *ad* 2hg-gg, h. e. *uti rectang.* M*ba ad rectang.*

δ. Cor. 2. M*ba*; *&* (δ) *rectæ, bc*, *b*G *sunt ordinatim applicatæ diametro* Ma.

XXI. h. Q. E. D.

Apoll. 12. XXIV. Si ex duobus hyperbolæ punctis T & L ducantur ad u-

II. Con. tramqve asymptoton parallelæ TX, TY item LQ, LR: rectangula

fig. 23. XTY, QLR sub his parallelis contenta æqualia sunt.

Sit ST ∞ a, IL ∞ b, TW ∞ c, LK ∞ *d*, XT ∞ x, TY ∞ y: *Erit*

α. XI. p. 1. (α) *ut* a *ad* b: *ita* x *ad* $\frac{xb}{a} \infty$ QL : *& ut* c *ad* d : *sic* y *ad* $\frac{dy}{c} \infty$ LR.

β. cor. 1. *Atqui* (β) bd ∞ ac *Ergo rectang.* QLR $\infty \frac{bdyx}{ac} \infty$ yx *rectang.*

def. 6. h. XTY. Q. E. D.

XXV. Si ad latus transversum OD, & diam. huic conjuga-

Apoll. 12. tam BC sumatur tertia proport. PD, qvæ latus rectum seu parame-

I. Con. ter dicitur; erit □tum applicatæ LM ∞ rectangulo sub latere recto PD, & diametro intercepta DM, plus rectangulo Z *a* P.

Sit OD ∞ q, BC ∞ 2b, DP ∞ r $\infty \frac{4bb.}{q}$ DM ∞ x, LM ∞ y

Er-

Ergo $AM \infty \frac{1}{2} q \pm x$, & $Za \infty \frac{rx}{q}$ *Erit autem* (α)

uti $\frac{1}{2} q$ *ad* b: *sic* $\frac{1}{2} q \pm x$? *ad* $\frac{bq \pm 2bx}{q} \infty$ MI

subtr. $y \infty$ ML

$\frac{bq \pm 2bx - qy}{q} \infty$ NK *vel* IL.

Ergo $\frac{bq \pm 2bx \pm qy}{q} \infty$ LK

□*tum* BD $\infty\ bb \infty$ (γ) $\frac{bbqq \pm 4bbqx \pm 4bbxx - qqyy}{qq} \infty$ *rect.* ILK. γ.def.6.h.

$bqqq \infty bbqq \pm 4bbqx \pm 4bbxx - qqyy.$

$yy \infty \frac{4bbqx \pm 4bbxx}{qq}$ *atqui* $\frac{4bb}{q} \infty r.$

Ergo $yy \infty rx \pm \frac{rxx}{q}$. Q. E. D.

Coroll.

Hinc constat, quadrata applicatarum MN, UV esse inter se ut rectangula OMD, OUD sub summa lateris transversi & diametri interceptæ OM, OU & sub diametro intercepta DM, DU. Apoll. 21. I. Con.

Sit enim MN ∞ y, UV ∞ UD ∞ ∞ v. *Erit* (δ) δ.XXV.h.

$yy\ (\infty\ rx \pm \frac{rxx}{q})$ *ad* $zz\ (\infty\ rv \pm \frac{rvv}{q})$: *uti* $qx \pm xx$ *ad* $qv \pm vv$. Q.E.D.

XXVI. Si sumto ubivis in Hyperbolæ diametro puncto M, cui ordinatim applicetur MN & diameter MD ad *b* continuetur, sitqve ut distantia puncti applicationis à centro sc. MA ad aggregatum diametrorum transversæ OD & interceptæ MD; sic diameter intercepta MD ad eandem continuatam M*b*: recta *b*N Hyperbolam in puncto N continget. fig. 23.

Ductâ UV*c parall. ad* MN: *sit* M*b* ∞ x, MD ∞ y MO ∞ z, MU ∞ a; *erit* UD ∞ y $\mp$ a, OU ∞ z $\pm$ a. *Sit autem* a ∞ o, *ut* UV ∞ U*c*.

Rectang. OUD *est ad rect.* OMD, *uti* $\square$ Ub *ad* $\square$ Mb (*utraq; e-*
α. XXV. h. *nim* (α) *sunt, uti* $\square$ UV ∞ c U *ad* $\square$ MN). *hoc est:*

XI. p. I. $\underline{yz +- az +- ay +- aa}$ *est ad* $\underline{yz}$: *uti* $\underline{xx +- 2ax +- aa}$ *ad* $\underline{xx}$

γ. 2. proleg. (γ) $\underline{yzxx +- azxx +- ayxx +- aaxx \infty yzxx +- 2ayzx +- aayz}$

$$\underline{zxx +- yxx +- axx \infty 2yzx \pm ayz}$$

Et quia $a \infty o$ $x \infty \frac{2yz}{z +- y}$ *sive* $\infty \frac{yz}{\frac{1}{2}z +- \frac{1}{2}y.}$ *h. e.*

AM $\infty \frac{1}{2} z +- \frac{1}{2} y$ *est ad* OD +- MD ∞ z : *uti* MD ∞ y *ad* Mb ∞ x.
Q. E. D.

fig. 23. XXVII. Si à qvolibet Hyperboles puncto N, per centrum A ducatur recta NA; erit hæc ejusdem diameter, cujus vertex N, & ordinatim applicatæ, rectæ *q*D, *d*e tangenti in N parallelæ.

Sint diametro DM *applicatæ*, e*g*, MN, mf, *iisq; dh parall.*

Sitq; MN ∞ a MD ∞ b, DO ∞ q, MO ∞ q +- b ∞ c MA $\infty \frac{1}{2}$ q +- b ∞ d N*d* ∞ f, AN ∞ g, *d* A ∞ g +- f ∞ h, *d* O ∞ 2g +- f ∞ m, *hg* ∞ x, *hm* ∞ y.

α. XXVI. h. *Erit autem* (α) Mb $\infty \frac{bc:}{d}$ M*b* ∞ (β) $\frac{fd:}{g}$ *hn* $\infty \frac{bch}{gd}$; *adeoq; gn* $\infty \frac{bch}{gd}$ - x:
β. XI. p. I. *mn* $\infty \frac{bch}{gd} +- y$: *h* D ∞ b +- $\frac{fd}{g}$; *h*O ∞ c +- $\frac{fd.}{g}$

Ergo gD ∞ b +- $\frac{fd}{g}$ - x *rectan-* *m*D ∞ b +- $\frac{fd}{g}$ +- y *rectan-*

$\underline{g\text{O} \infty c +- \frac{fd}{g} - x}$ *gul.* DgO *m*O ∞ c +- $\frac{fd}{g}$ +- y *gul.* DmO

$\infty \frac{bcgg +- ddfm - 2dghx +- ggxx}{gg}$ $\infty \frac{bcgg +- ddfm +- 2dghy +- ggyy}{gg}$

(*quia* b +- c ∞ 2d, g +- f ∞ h, 2g +- f ∞ m)

γ. Cor. XXV. h. *quia v.* (γ) $\square$ OMD *ad* $\square$ OgD (DmO) *uti* $\square$ MN *ad* $\square$ eg (mf) *sūt* $\square$ *ta*
$\infty \frac{bcgg +- ddfm - 2dghx +- ggxx}{bcgg}$,,aa $\infty \frac{bcgg +- ddfm +- 2dghy +- gg}{bccgg}$ (yy ,,aa

Sed & quia (β) Mb *ad* MN : *uti gn* (mn) *ad eg* (*mf*). *eadem* $\square$ *ta*
eg $\infty \frac{bbcchh - 2bcdghx +- ddggxx}{bbccgg}$,,aa *mf* $\infty \frac{bbcchh +- 2bcdghy +- gg}{bbccgg}$ (ddyy ,,aa

His

His æquatis (*quia* hh-gg ∞ fm) $xx \infty \frac{bcfm}{gg}$ *ut &* $yy \infty \frac{bcfm}{gg}$

Ergo hg $\propto$ x $\propto$ *hm* $\propto$ y *& hinc* (β) *cd* $\propto$ *df*

Quod si pro Nd $\propto$ f, *ponatur* Nq $\propto$ p, *& pro dO* $\propto$ m $\propto$ 2g $\pm$ f: qO ∞ 2g $\pm$ p, *fiet* $\square$ *m*D $\infty \frac{2bcgp \pm bcpp,}{gg}$ *uti* $\square$ *hg* (*rejecto* m) $\infty \frac{2bcgf \pm bcff.}{gg}$ *Ergo* $\square$ *m*D, *ad* $\square$ *hg*, *seu inter quæ eadem est ratio* (β) $\square$ qD *ad* $\square$ *de uti* 2gp $\pm$ pp, *ad* 2gf $\pm$ ff, *h. e. uti rect.* OqN *ad rect.* OdN, *& hinc* (δ) *rectæ* qD *& de ordinatim applicatæ diametro* ANq. Q. E. D. δ. Cor. XXV. h.

SECTIO II.

De Area Parabolæ, Ellipsis & Hyperbolæ.

HArum definitiones per se manifestæ.

XXVIII. Area parabolæ aAg æquatur $1\frac{1}{3}$ trianguli aAg æqualem basin & altitudinem cum ipsa habentis. Archim. d. qvadr. parab. prop. 17. & 24.

Sit latus rectum ∞ r, AV *vel be* ∞ x, *bd* ∞ y, AD vel bIL ∞ z, *altitudo parabolæ* ∞ a. *Ergo* aV (α) $\infty \sqrt{rx}$ & KD $\infty \sqrt{rz}$. *Erit ob* $\triangle$la *similia*. AF a, A bd (β). fig. 21.

uti AF $\propto \sqrt{rx}$ *ad* AV *vel* Fa $\propto$ x : *sic* A*b* $\propto \sqrt{rz}$ *ad bd* $\propto$ y α. Cor. 1. def. 1. & 2. h

$y\sqrt{rx} \propto x\sqrt{rz}$

yyx $\propto$ z : *& hinc* (γ) x *est ad* y : *uti* y *ad* z β. XI. h.

h. e. ubicunque fiat intersectio d *semper erunt*, be, bd, bk *tres continuè proportionales, atq; hinc* (δ) *semper erit, uti* $\square$be *ad* $\square$bd: *sic* be *ad* bk : *quo fit, ut &* (ε) *omnia* $\square$*ta ex singulis rectis* AV *parallelis & parallelogr.* AVaF *constituentibus*, *sint ad omnia* $\square$*ta rectarum constituentium* $\triangle$*lũ* AaF, *sic ipsum parallelogr.* AVaF *ad spatium* AKaF. *Unde posita* F *basi hujus parallelogr. ejusq; altitudine* ∞ a: *erit uti* $\square$*ta rectarum* $\square$*li* AVaF ∞ axx, *ad* $\square$*ta rectarum* $\triangle$*li* AaF $\infty \frac{1}{3}$ axx (*ex reg Bacheti in proleg. ostensa*) *sic* $\square$ γ. 2. prol. δ. Cor. 7. proleg. ε. 3. proleg. n. 5.

AV

AV aF ∞ △lo a Ag, ∞ ax, *ad spatium AK aF, quod hinc est* ∞ $\frac{1}{3}$ ax: *ut totum planum* aK Ag *sit* ∞ 1 $\frac{1}{3}$ ax. Q. E. D.

Arch. de Conoid. & Sphær. pr. 5. 6. fig. 25. ζ. I. h. η. Cor. XXI. h. ϑ. 3. prol. n. 5.

XXIX. Area Ellipsis æquatur Circulo, cujus diameter media est proportionalis inter utrasque diametros ellipsis.

Sit ellipsis ABCD, *eiq; circumscriptus circulus* ASCR *sintque utrique ordinatim applicat.* GHS *eiq; parallela*, EBQ *per Centrum* E *transiens. Hic quia, ubicunque applicetur* GHS, □ GH *est ad rectang.* AGC. ∞ (ζ) □*to* GS: *uti* (η) □ EB *ad rectang.* AEC ∞ (ζ) □to EQ *erit semper* GH *ad* GS *uti* EB *ad* EQ *adeòq;* (ϑ) *tota ellipsis* ABCD *ad totum Circulum* AQCR, *uti* PB *ad* PQ *seu uti axis conjugatus* DB *ad axem transversum* AC ∞ RQ *& vicissim si ergò* AC ∞ q DB ∞ Z, *Circulus* AQCR ∞ x: *erit juxta dicta ellipsis* ABCD ∞ $\frac{xz}{q}$: *quæ si ponatur esse Circulus, foret uti Circ.* x *ad* □ *diam.* ∽ qq: *sic* (κ) *Circ.* $\frac{xz}{q}$ *ad quadratum sui diametri* ∽ qz, *ut diameter ipsa fieret* ∞ √q z. Q. E. D.

Coroll.

Archim. d. l. pr. 7. λ. XXIX. h. μ. Cor. IX. h.

Ellipsis est ad ellipsin uti rectangula ex diametris.

Certum enim est circulos, quibus æquantur (λ) *esse in ea ratione* (μ)

Quæ de Hyperboles area passim disputant Eruditi prolixiora sunt quàm ut hic afferri possint, neque nostrum hic est litem istam dirimere.

SECTIO III.

De Conoide Parabolico, Elliptico, seu Sphæroide & Hyperbolico.

Definitio.

SI indefinitè multæ rectæ parallelæ, quibus constat planum Parabolæ, Ellipseos aut Hyperbolæ fiant totidem Circulorum parallelorum diametri, formabuntur figuræ solidæ, quas *Conoidea, Parabolica, Elliptica seu sphæröidea*) aut *Hyperbolica* dicimus

THEO-

THEOREM.

XXX. Solidum Conoidis parabolici æquatur basi in dimidi-
am altitudinem ductæ.

Sit Conoides parabolicum HAC, *ejusque basis circulus* HC ∞ x, fig. 24.
altitudo ∞ a: *erit ejus solidum* ∞ $\frac{1}{2}$ ax.

Hoc Conoides conflatur ex indefinite multis Circulis, quorum
radii sunt BC, DE, FG, *ordinatim sc. applicatæ parabolæ* HAC, *&*
BC *parallelæ. Atqui horum radiorum* □*ta sunt inter se uti diame-* α. Cor. 3.
tri interceptæ, (α) □*tũ sc.* BC *ad* □ DE, *uti* AB *ad* AD &c. *& Cir-* def. 1. 2.
culi sunt inter se, ut (β) □*ta diametrorum seu etiam radiorum,* sect. 1. h.
unde & hi Circuli ex radiis BC, DE &c. *sunt inter se. uti* (γ) AB, β. Cor.
AD &c. *sed omnes diametri interceptæ* AB, AD, AF &c. *sunt in A-* IX. h.
rithmetica progressione (*omnes n. applicatæ* DC, DE, FG *æquali:* γ. 1. prol.
ter inter se distant) *ergo & ipsi Circuli ex singulis applicatis* BC,
DE, FG *tanquam radiis orti erunt in Arithmetica progressione.*
Hujus a. minimus terminus est ∞ a *maximus* ∞ *circulo* HBC ∞ x,
numerus terminorum ∞ *altitudini parabolæ* ∞ a, *unde ejus sum-*
ma, h. e. totum Conoides (*ex reg priori in proleg. ostensa*) *est* ∞
$\frac{1}{2}$ax Q. E. D.

Coroll.

Archim.
Conoides parabolicum æquatur 1 $\frac{1}{2}$ Coni eandem altitudinem de Con.
& basin cum ipso habentis. & Sphær.

XXXI. Sphæroides ellipticum ABCD æquatur quadruplo Co- pr. 23. 24.
ni ADB, cujus basis est circulus ab axe conjugato DB, tanquam dia- Archim. d.
metro descriptus, altitudo verò ∞ dimidio altitudinis sphæroidis. l. pr. 29. 30.

Sit Circulus à diam. DB *ortus* ∞ y, *altitudo totius solidi* ∞ 2a: fig. 25.
erit totum sphæroides ∞ 1 $\frac{1}{3}$ ax *& ejus dimidium* DAB ∞ $\frac{2}{3}$ ay.

Circuli ex quibus constat Conoides DAB, v. g. DB, FH, IL, MO, α. cor. IX.
sunt inter se, uti rectangula. AEC, AGC, AKC, ANC, (*utraq; enim* h. Cor.
sunt (α) *uti* □*ta* EB, GH, KL. NO) *& vicissim: unde & uti rectang.* 2. XXI. h.
AEC *ad Circ.* DB *sic* (β) *summa omnium rectang.* AEC, AGC, AKC, β. 3. prol.
ANC *ad totum Conoides* DAB. *Posita ergo* AC ∞ q, *diametrò q, in-* n. 5.
tercepta AE ∞ x *erit rectang.* AEC ∞ qx-xx, *hoc est* ∞ AC *ductæ in*
AE, *minus* □ to AE, *quod cùm in omnibus iis rectangulis obtineat,*
erit eorum summa ∞ q, *ductæ in summam omniũ diam. intercepta-*
rum AE, AG, AK, AN *minus summa* □*torum* AE, AG, AK, AN.

 Quo-

Quoniam autem rectangula ea totidem sunt numero, quot sunt Circuli Conoidis DAB, *seu quot puncta sunt altitudinis* $\propto$ a: *erit summa diametrorum omnium interceptarum AE, AG, AK, AN (ex reg. priori in proleg.)* $\propto \frac{1}{2}$ ax; *summa verò* □*torũ AE, AG, AK, AN ex reg. posteriori* $\propto \frac{1}{3}$ axx. *ut summa rectangulorum AEC, AGC* AKC, ANC $\propto \frac{1}{2}$ q ax - $\frac{1}{3}$ a xx $\propto \frac{1}{6}$ a qq; *quia* x $\propto \frac{1}{2}$ q.

Erit ergo ex demonstratis, uti $\frac{1}{4}$ qq *ad* y : *ita* $\frac{1}{6}$ a qq *ad Conoides* DAB $\propto \frac{2}{3}$ ay. Q. E. D.

Archim. XXXII. Conoides Hyperbolicum ABC est ad Conum ejus-
d. Conoid dem baseos & altitudinis ABC, uti diameter intercepta, plus $1\frac{1}{2}$ la-
& Sphær. teris transversi, ad diametrum interceptam plus latere transverso.
propos. *Circuli hujus Conoidis* BC, FH, IL &c. *sunt inter se uti rectan-*
27. 28. *gula sub latere transverso plus diametro intercepta, & diametro*
fig. 26. *intercepta (utraq; enim (α) sunt inter se ut* □*ta* DC, GH, KL &c.)
α. Cor. IX. *Positis ergo latere trans-v.* $\propto$ q *interceptâ* AD $\propto$ x, *altitudine* $\propto$ a;
h. *circuloq;* Bc $\propto$ y: *deprehenditur eodem ratiocinio, (quo in præ-*
cor. XXV. *ced. propos. usi sumus) summa rectangulorũ sub latere trans-v.* $\pm$
h. *diametris interceptis, & sub diametris interceptis* $\propto \frac{1}{2}$ q a x $\pm \frac{1}{3}$
axx: *fietq; ex dictis*

uti qx $\pm$ xx *ad* y *sic* $\frac{1}{3}$ qax $\pm$ axx *ad totum Conoides* ABC $\propto$

$$\frac{3qay \pm 2ayx}{6q \pm 6x} \quad \textit{Atqui} \quad \frac{3qay \pm 2ayx}{6q \pm 6x} \textit{ est ad } \frac{ay}{3} \propto \textit{Cono } ABC,$$

uti $1\frac{1}{2}$ q $\pm$ x, *ad* q $\pm$ x. Q. E. D.

Ὡς ἐν παρόδῳ.

I. Philosophia vulgaris seu Aristotelica seu Scholastica Ethnicismo & Atheismo favet. II. Argumentum pro exsistentia Dei, qvod ex idea innata desumitur est solidissimum; nititur enim omnium scientiarum fundamento, qvo subruto illæ omnes evanescunt. III. Deus certiùs & priùs cognoscitur, quàm ulla res corporea. IV. Hinc argumentum, qvo ex rerum creatarum exsistentia Numen esse ostenditur, conclusionem habet clariorem ac præmissas. V. Hypothesis Copernicea, tam vulgari Ptolomaica, qvàm Tychonica aut Semi-Tychonica verior est. VI. Omnis magnitudo est proportio & omnis proportio est magnitudo.

FINIS.

P. 5. l. 22. *pro* numerum *l.* semissem. P. 23. *post* itidem, *add.* suos Circulos describunt, qvorũ omniũ idem.

20.

DISSERTATIO MATHEMATICA
EXHIBENS
GEOMETRIÆ ELEMENTA,
ALGEBRAICE,
Ubi opus,
EVOLUTA,
Quam
PRÆSIDE
DN. BERNHARDO ALBINO,
PHILOS. ET MED. DOCT. hujusque PROF. ORD. CELEBERRIMO atq; h. t. DECANO,
PATRONO & PRÆCEPTORE SUO JUGITER OBSERVANDO,
D. V. SEPTEMB. ANNI 1685.
Publicè discutiendam offert
AUCTOR
OTTO HOMFELD,
Bremensis.

Francof. ad Oderam,
Typis CRHISTOPHORI ZEITLERI.