
Freiherr v. Ende-Altjessnitz

Q. D. B. V.

DISSERTATIO GEOMETRICA DE FIGURIS PLANIS ISOPERIMETRIS REGULARIBUS,

Quam

RECTORE MAGNIFICENTISSIMO,
SERENISSIMO PRINCIPE AC DOMINO
DN.
FRIDERICO WILHELMO,
MARCHIONE BRANDENBURGICO ET ELECTORATUS HEREDE, AC RELIQVA,

IN ILLUSTRI FRIDERICIANA
Amplissimæ Facultatis Philosophicæ indultu,
publico Eruditorum Examini subjiciunt

PRÆSES
M. LUCAS BESELIN,
Ejusdem Facult. Adjunctus.
&
RESPONDENS
WICHMANNUS CAROLUS Knoch/
Halberst. Saxo, S. Theol. & Phil. Stud.
Ad d. ~~XII.~~ 16 April. MDCC.

Halæ, typis Christophori Andreæ Zeitleri, Acad. Typogr.

Illustrissimis Comitibus ac Dominis,
Dominis

ERDMANNO
ET
FRIDERICO
COMITIBUS
de PROMNITZ,

LIBERIS BARONIBUS Dynastiæ Plessensis, in Sorau, Tribel & Naumburg, Dominis Diœceseos Drenensis & Klitschdorfensis, nec non Dynastis in Halbau, Sunau, Burau & reliquis.

DOMINIS SUIS GRATIOSISSIMIS ætatem perofficiosè & submissè colendis,

paucas hasce lineas geometricas

offert

humillimus servus

WICHMANNUS CAROLUS Knoch.

Σὺν Θεῷ.

PRÆFAMEN.

GEOMETRIAM scientiam esse nobilissimam pariter atque utilissimam, elegantiorum nemo, ut opinamur, intra dubitationis aleam ponere, aut inficias ire, facile poterit. In tanta eam existimatione habuit Plato, ut, cum aliquando interrogaretur, quidnam ageret DEUS? celebre illud respondere, non dubitaverit: Θεὸν ἀεὶ γεομετρεῖν. Quo responso Geometriæ, imo universæ Matheseos præstantiam testatus est, qua Summus Rerum Opifex omnis generis figuras Geometricas in natura nobis expressit, & conservando continuo exprimit, qua etiam nos homunciones in hac vitæ caligine quodammodo dici possumus *imitari DEUM*, qui omnia condidit *Mathematice*, id est: *in numero, pondere & mensura. Sapient.* Cap. XI. vers. 22. Tanta est hujus scientiæ utilitas, ut tota sapiens Antiquitas eam (una cum Arithmetica, tanquam alarum altera) pro solido omnium scientiarum fundamento, a primis statim annis sedulo suis inculcare, haud dubitaverit, ac ἀγεωμετρήτους e Scholis suis prorsus eliminaverit. De magno illo Xenocrate Philosopho post Platonem tertio memoriæ proditum est, quod is, cum aliquando Geometriæ ignarum in Gymnasio conspexisset, *Abi*, dixerit, λαβὰς γὰρ ὀυκ ἔχεις φιλοσοφίας. Quod divino prorſus ingenio perſpicacisſimus Plato optime intellexit, unde præ foribus Acroaterii ſui aureum iſtud pinxit: ὀυδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω. Et Lib. XXXI. *Dial.* 7. *de Republ. Quam maxime igitur*, inquit, *præcipiendum eſt, ut, qui præclarisſimam hanc habitant civitatem, nullo modo Geometriam ſpernant.* Et paulo poſt: *Scimus etiam ad diſciplinas omnes facilius perdiſcendas, intereſſe omnino, attigeritne Geometriam aliquis, an non.* In Græcorum ergo Scholis, non, niſi jactis Geometriæ fundamentis, ad philoſophandum dabatur acceſſus, hinc ſemper in Scholis præſto erat abacus pulvere, (qui a Cicerone *pulvis eruditus* dicitur,) conſperſus, in quo acutisſima virgula figuras Geometricas pingebant, quas commode, ſi quid diſpliceret, in abaco hoc potuerunt mutare: & hunc figuras pulveri inſcribendi morem apud ætate provectos quoque invaluiſſe, probabile eſt; unde Ariſtippus Socraticus in Rhodienſium littus poſt naufragium, ejectus, cum inibi depictas in arena cerneret figuras Geometricas, *Confidete*, exclamavit, *o Socii! Ad homines pervenimus! Hominum enim veſtigia cerno.* De Imperatore Diocletiano legimus, quod utilitatibus Geometriæ commotus, ſanciverit: *Ut Geometria publice doceretur & exerceretur, ob ingentes ab ea in Rempublicam utilitates.* Quam etiam ob cauſam eleganter Philo Geometriam ἀρχὴν καὶ μητρόπολιν omnium ſcientiarum appellavit; quo elogio innuere voluit, eam per totam rerum naturam diffuſam eſſe, ut nihil fere in civili hominum converſatione & ſocietate apte & artificioſe fieri posſit, in quo non appareat aliquid, quod ex Geometria ortum ſuum traxerit. Operæ ergo pretium nos facturos eſſe, arbitrati ſumus, ſi ſpeciminis Academici loco, Geometricum thema eligeremus, ac de planis iſoperimetris regularibus nonnulla proponeremus. Cœpta DEUS ὁ ἀεὶ γεωμετρῶν, ſecundet!

§. 1.

§. 1.

Figura est magnitudo, *quæ sub aliquo vel aliquibus terminis comprehenditur*, *juxta Def.* 14. I. *Euclid.* Quibus verbis non intendit, quod omnis magnitudo terminos possidens, figura sit, nam lineas angulosque inter figuras non recenset: ejusmodi ergo per figuram intelligit magnitudinem, quam termini ambiunt; & undiquaque claudunt.

§. 2. Figura plana est, quæ in planitie describitur, ac lineis terminatur, quam duæ rectæ constituere nequeunt, *juxta Axioma* 14. I. *Euclid.* Plana dicitur ejusmodi figura, ad distinctionem figurarum solidarum, quæ sunt corpora; & superficiebus terminantur.

§. 3. Figuræ Isoperimetræ describuntur communiter ex etymo græco, per figuras æqualis ambitus, sive quarum termini simul sumpti sunt æquales. Perimeter enim, latine ambitus, nihil aliud est, quam terminus, figuram terminans & claudens.

§. 4. Figuræ regulares seu ordinatæ dicuntur, quarum omnes termini, (ut lineæ in figuris planis, & superficies in figuris solidis) cum omnibus angulis sunt æquales. Hujusmodi figuræ in singulis figurarum planarum speciebus non sunt plures una. Nam in Triangulis solum Isopleuron, seu Æquilaterum est regulare; in Quadrangulis solum Quadratum; iu Polygonis illa solummodo sunt regularia, quæ ad æqualia latera circulo vel inscribuntur, vel circumscribuntur. Reliqua plana omnia in speciali hac regularitatis acceptione, sunt irregularia. Inter figuras solidas autem quinque saltem reperiuntur regulares, quæ vulgo *corpora Platonica* vocantur. Sed hac vice de figuris tantummodo planis agere constituimus.

§. 5. Modus construendi figuras planas regulares Isoperimetras, non est difficilis: Triangulum enim regulare construitur *juxta Prop.* 1. I. *Euclid.* quod, si alio plano isoperimetrum desideretur, recta, super qua triangulum hoc constituitur, sit totius peripheriæ tertia pars. Quadratum perficitur *juxta* 46. I *Euclid.* & quidem determinatæ alicujus peripheriæ, si quarta peripheriæ pars pro Quadrati latere assumatur. Quomodo etiam Pentagonum, Hexagonum, atque Circulus, (ulterius enim progredi instituti ratio non permittet) construantur, sequentia indicabunt Problemata.

PROBLEMA I.

Pentagonum regulare, datæ cuivis figuræ isoperimetrum, delineare.

Quinta datæ perimetri pars erit latus Pentagoni desiderati ex. gr. AB *Fig.* I cui superstruitur Pentagonum regulare, secando hanc lineam *extrema & media ratione, per* 11. II *Euclid.* cujus majus segmentum AC transferatur in utrinque productam occultam, nimirum ab A in E, & a B in F. Centris E & A, item B & F intervallo lineæ datæ AB, fac decusses D & G, ex quibus eadem circini apertura fiat decussis I. Puncta ADIGB, rectis connexa, dabunt Pentagonum regulare optatum, Q.E.F.

DEMONSTRATIO.

Æquilaterum est *per constr.* cum omnes decusses facti sint ad intervallum datæ rectæ AB. Quod autem sit & æquiangulum, ita demonstratur: Ducta recta DE, erit DEA Triangulum isosceles, cujus angulus ad basin duplus est anguli ad verticem, *per* 10. IV. *Eucl.* Unde *per ejusdem Prop. Coroll.* angulus ad basin EAD continebit duorum rectorum $\frac{2}{5}$, & per consequens angulus reliquus DAB habebit duorum rectorum reliquas tres quintas, *per* 13. I. *Euclid.* est ergo angulus Pentagoni regularis. *per Coroll. Prop.* 11. *IV. Euclid.*

Euclid. Eodem modo ostendi poterit angulum G B A esse angulum Pentagoni regularis. Ex quo sequitur totum Pentagonum esse æquiangulum, ut constat *ex 8. I. Euclid.* ductis rectis D G, DB. Est ergo Pentagonum regulare, datæ figuræ isoperimetrum, Q. E. D.

PROBLEMA II.

Hexagonum regulare datæ figuræ isoperimetrum, construere.

Sexta datæ perimetri pars, ex. gr. K L *Fig. II*, quæ est Hexagoni latus, circino capiatur, qua tanquam radio describatur circulus, in cujus peripheriam sex hujusmodi partes transferantur; puncta rectis connexa, dabunt Hexagonum isoperimetrum. Q. E. F.

DEMONSTRATIO

est ipsa 15. IV. *Euclidis.*

PROBLEMA III.

Circulum datæ figuræ isoperimetrum describere.

Fiat juxta Regulam De-tri: ut 220 ad 70, ita data peripheria, ex. gr. 12 Pert. ad 3,81(2) Diametrum, vera paulo minorem, cujus dimidium 1,905(3) est circuli Radius paulo minor. Vel: ut 213 ad 70, ita data peripheria 12 Pert. ad 3,94 (2) Diam. vera paulo majorem, cujus dimidium 1,97(2) est Circuli Radius paulo major.

DEMONSTRATIO.

est *Propos.* III *Archimedis*, qua demonstravit, Circuli circumferentiam diametrum continere minus quam ter & unam septimam, seu $\frac{10}{70}$ plus vero quam ter & $\frac{10}{71}$

§. 6. Archimedæa hac proportione pro minoribus quidem circulis formandis uti possumus, pro majoribus autem adhibenda est proportio *Ludolphi a Ceulen* (vel aliquot

quot saltim zyphræ pro circuli magnitudine, ex hac desumi poterunt) quam Herculeis omnino laboribus ex numeris surdis eruit; posita enim diametro 1, demonstravit in *Lib. de Circulo*, peripheriam vera paulo majorem

esse $3\frac{14159265358979323846264338327950289}{100000000000000000000000000000000000}$

& vera paulo minorem

esse $3\frac{14159265358979323846264338327950288}{100000000000000000000000000000000000}$

Proportio hæc non saltim Archimedæa, sed & omnibus aliis exactior ac veræ propinquior est, quæ etiam teste *Dibvadio, in Comment. ad Prop.* VII. *Lib.* IV. *Euclid. tuto in Astronomico calculo absq; ullo errore notabili adhiberi potest, quæ laude & gloria maxima digna est, & sola inventoris nomen, æterna memoria sacrum, posteris tradit, etiamsi aliis inventis per se clarus non foret.*

§. 7. Præcipuum, quod circa figuras regulares isoperimetras adduci poterit, erit earum proportio, tum inter se, tum respectu circuli, quæ, priusquam a nobis proferatur, ac debite demonstretur, sequens præmittimus

LEMMA.

Omnis figura plana regularis æqualis est rectangulo, contento sub perpendiculari, e centro figuræ in unum latus ducta, & sub dimidiato ambitu.

DEMONSTRATIO.

Resolvatur Figura data in triangula, (*vid. Fig.* III.) ductis e centro rectis NM, NO, NP, NQ, NR, quæ omnia ejusdem erunt capacitatis & altitudinis, *per 4. I. Eucl.* quibus æqualia construantur, & juxta se invicem ponantur in recta linea MS, quæ Polygoni perimetro æqualis sit, ductaq; recta, NS, Triangulum MSN, æquale erit omnibus Polygoni triangulis MON, OPT, PQT, QRT, & RST, *juxta I. Sexti Eucl.*

xti Eucl. & hoc æquale erit rectangulo NVPW, *juxta 42. I. Eucl.* Ergo *per Axioma I. I. Eucl.* Polygonum datum eſt æquale rectangulo NVQW, ſub perpendiculari NW, & dimidiato ambitu contento. Q.E.D.

THEOREMA I.

Inter omnes figuras planas regulares, iſoperimetras, capacitatis exceſſus unius ſupra alteram, æqualis eſt rectangulo, ſub perpendiculorum differentia & ſemiperipheria contento.

DEMONSTRATIO.

Figurarum iſoperimetrarum regularium illa, quæ plura continet latera, majorem habet perpendicularem, ex centro figuræ in latus unum demiſſam *juxta Demonſt. Clavii, Comment. in I Cap. Sphæræ de Sacro Boſco pag.* 103. & 104. Sed area cujusvis figuræ regularis æqualis eſt rectangulo, contento ſub hac perpendiculari, & ſub dimidiato ambitu, *per Lemma præc.* Ergo exceſſus unius figuræ ſupra alteram erit rectangulum ſub perpendiculorum differentia & ſemiperipheria contentum. Sumamus exempli loco triangulum iſopleuron ABC *Fig.* IV, & quadratum, triangulo iſoperimetrum, DEFG, utriusque figuræ centrum eſt H, ex quo demiſſa eſt perpendicularis trianguli, HI, & quadrati HK, ductis quoque rectis, IL, KN, & HM, ſibi invicem parallelis, ſed figurarum ſemiperipheriæ æqualibus, dico: Rectangulum HILM eſſe aream Trianguli, & rectangulum HKNM eſſe aream quadrati. *juxta Lemma præc.* Ergo una figura excedit alteram rectangulo IKNL, ſub perpendiculorũ differentia IK, & ſemiperipheria *K*N comprehenſo. Q.E.D.

THEOREMA II.

Quadratum eſt ad triangulum iſopleuron, ſibi iſoperimetrum ut 9 ad $4\sqrt{3}$, id eſt: ut 9 ad numerum paulo majorem $6\frac{928}{1000}$ & paulo minorem $6\frac{929}{1000}$

DEMONSTRATIO.

Sumamus quodlibet quadrati (*Fig.*V.) latus, 3 Pert. ut tota peripheria sit 12 Pert. & ejus area 9 Pert. quadr. Unde trianguli regularis isoperimetri O P Q *Fig.* VI. quodlibet latus continebit 4 Pert. pro cujus area invenienda, ducenda est perpendicularis O R in dimidium baseos P R, sive Q R. Sed perpendicularis invenitur ex triangulo rectangulo O P R *juxta 47. I Euclid.* $\sqrt{12}$, quæ ducta in dimid. baseos P R 2 Pert. producit, $4\sqrt{3}$ sive $\sqrt{48}$, aream trianguli O P Q. Ex hoc numero 48, si extrahas radicem quadratam, invenies radicem vera paulo majorem 6,929 (3) & vera paulo minorem 6, 928 (3) Ergo quadratum se habebit ad triangulum isopleuron sibi isoperimetrum ut 9 ad $4\sqrt{3}$. Q. E. D.

§. 8. Cum area trianguli æquilateri numeris rationalibus exprimi nequeat, *Metius Geometriæ suæ Part. 2 Cap. 3. pag. 161.* item *Heinlinus Geometriæ Parte V. pag. 245*, aliiq; hac utuntur proportione: ut 1 ad $\frac{13}{30}$ ita quadratum lateris trianguli, ad aream trianguli quæsitam, quæ semper producit aream paulo majorem, nam trianguli, cujus singula latera sunt 1, area paulo major est $\frac{1733}{4000}$, sed $\frac{13}{30}$ adhuc majus est. Quanto facilius ergo hoc modo area invenitur, tanto longius (inprimis in triangulis majoribus) a vera abit. Cæterum parvam hujusmodi differentiam, uti dicunt, non curant, quæ omnino a Geometris curari debet, ne hic locum habeat lepidum illud Cardani votum: *O utinam non haberem, nisi tantum agri, quantum ex hoc modo mensurandi singulis annis a vera mensura aberratur.*

THEOREMA III.

Quadratum se habet ad Pentagonum regulare sibi isoperiperimetrum, ut 9 ad $V.51\frac{21}{25} \dagger V839\frac{101}{125} \dagger V251\frac{589}{625}$ i.e. ut 9 ad numerum paulo majorem $9\frac{4166}{5000}$, & paulo minorẽ $9\frac{4167}{5000}$.

DEMONSTRATIO.

Quadrati *Fig.* V. repræsentati perimeter est 12 Pert. Pentagoni ergo ipsi isoperimetri *Fig.* VII. (cujus constructio ex, Probl. præc. 1 patet) quodlibet latus continebit 2,4 (1) Area hujus Pentagoni ita investigatur: Ex *Ludolpho a Ceulen*, *Fundam. Geometriæ Lib.* V *Probl.* 3 & 5, Item ex *Dibvadii Comment. in Lib.* IV *&* VI *Euclid.* aliisque, tanquam certissimum præsupponimus, latus Pentagoni, Circulo inscripti, assumpto ejus radio pro 1, esse $V.2\frac{1}{2} -- V1\frac{1}{4}$ ejusque Aream $V.3\frac{29}{32} \dagger V3\frac{53}{1024}$. Cum autem Polygonorum similium proportio duplicata sit proportionis laterum homologorum, *juxta* 20. VI. *Euclid.* erit juxta Regulam De-tri: Ut Quadratum a latere hujus Pentagoni $2\frac{1}{2} -- V1\frac{1}{4}$ ad aream suam, $V.3\frac{29}{32} \dagger V3\frac{53}{1024}$ ita Quadratum a Pentagoni latere dato ST $\frac{144}{25}$ ad aream Pentagoni ignotam.

Operis formula hæc est:

Quadrat. lateris.	Area	Quad. lateris dati ST
$2\frac{1}{2} -- V1\frac{1}{4}$	$V.3\frac{29}{32} \dagger V3\frac{55}{1024}$	$\frac{144}{25}$

Ultimi termini □ est $\frac{20736}{625}$ & Biquadrat. $\frac{429981696}{390625}$

Multipl. per $3\frac{29}{32}$ sive $\frac{125}{32}$ hoc vero per $3\frac{53}{1024}$ sive $\frac{3125}{1024}$

Producit - - - - $\frac{648}{5}$ Producit - - - $\frac{419904}{125}$

Unde productum ex multiplicatione termini medii & ultimi ortum, adeoque per terminum primum dividendum est $V.\frac{648}{5} + V\frac{419904}{125}$ Term. primus $2\frac{1}{2} - V 1\frac{1}{4}$

Binomii □ $\frac{15}{2} + V\frac{500}{16}$ Divis. Binom. $\frac{5}{2} + V\frac{5}{4}$

$+ V 524880 + 324$ $\quad - V\frac{125}{16} - \frac{1}{4}$

$972 + V 157464$ $\quad \frac{25}{4} + V\frac{125}{16}$

$V.1296 + V 524880 + V 157464$ Productum - - - 5 Divisor.

Facta porro divisione hujus numeri surdi per 5, quotus est $V.51\frac{21}{25} + V 839\frac{101}{125} + V 251\frac{589}{625}$ Area Pentagoni optata. Ad numeros autem absolutos & rationales revocatur hæc quantitas, addendo radices proxime majores $\frac{396817339}{25000000}$ & $\frac{724487405}{25000000}$ tum etiam proxime minores $\frac{396817338}{25000000}$ & $\frac{724487404}{25000000}$ numero absoluto $51\frac{21}{25}$, & ex summa iterum extrahendo radicem, habebisque Aream Pentagoni paulo majorem $9\frac{4167}{5000}$ & paulo minorem $9\frac{4166}{5000}$ Q. E. D.

§. 9. Longe aliam Pentagoni regularis dimensionem tradit *Petrus Ramus*, *Geometriæ suæ Lib.* XIX. Latus enim quodlibet facit 12 partium, & radium, sive lineam, e centro Pentagoni in singulos angulos ductam, 10 partium, adeoq; perpendicularem 8 partium, ut quadratum radii 100, æquale sit quadratis duobus, ex perpendiculo & lateris dimidio, *juxta* 47. I. *Euclid.* Atque ita hujusmodi regularis Pentagoni area ipsi est 240 part. quadr. quam Pentagoni dimensionem etiam *Petrus Ryff in Quæstionibus suis Geometricis, p.* 94. ex

94. ex *Ramo* adduxit. Cæterum a vera Pentagoni dimensione longe aberrant, ex *Euclidis* enim *Prop.* 11 Lib. XIII. constat, quod, si diameter circuli Pentagono circumscripti, fuerit rationalis, latus Pentagoni semper sit linea irrationalis, quæ vocatur *Minor*. Quare *Broscius in Apologia sua pro Aristotele & Euclide contra Ramum*, Ramum vocat *Geometriæ ac surdorum doctrinæ ignarum, ac similem incipienti Geometriæ discipulo, qui se torquebat circa constructionem Trianguli ex datis lateribus 2.3.7.* cum *non advertisset impossibilem esse quæstionem.* Plures in Geometria Rami errores, ex numerorum surdorum ignorantia orti, a *Broscio l. cit.* aliisque adducuntur. Unde merito *Dibvadius in Comment. sui ad Euclid. Dedicatione, Omnem*, inquit, *Pseudomathematicis errandi occasionem sola numerorum surdorum ignorantia peperit.*

THEOREMA IV.

Hexagonum regulare est ad Circulum sibi isoperimetrum paulo majorem, ut $6\sqrt{3}$ ad $11\frac{460}{1000}$ & paulo minorem, ut $6\sqrt{3}$ ad $11\frac{457}{1000}$

DEMONSTRATIO

Area Hexagoni V W X *Fig.* IIX. cujus perimeter sit 12 Pert. ac proinde singula latera 2 Pert. ita investigatur: Cum *per Coroll. 1. Prop. 15. IV. Euclid.* linea VW sit æqualis lateri W X, quod a perpendiculari VY bifariam secatur, in triangulo VYW ad Y rectangulo, ex data Hypothenusa V W 2 Pert. & Basi WY 1 Pert. invenitur *juxta* 47. I *Euclid.* perpendiculum VY, $\sqrt{3}$ quod in semiperipheriam 6 Pert. ductum, constituit Hexagoni aream $\sqrt{108}$ sive $6\sqrt{3}$ quæ est paulo major 10,392(3) & paulo minor 10,393(3). Circuli autem C A B (*Fig.* IX.)] area, ex data peripheria 12 Pert. sequenti invenitur proportione:

Ut 3141 ad 1000, ita $\left\{\begin{array}{c}\text{data peripher.}\\ \text{12 Pert.}\end{array}\right\}$ ad $\left\{\begin{array}{c}\text{Diam paulo maj.}\\ 3,820\,(3)\end{array}\right.$

Ut 3142 ad 1000, ita $\left\{\begin{array}{c}\text{data peripher.}\\ \text{12 Pert.}\end{array}\right\}$ ad $\left\{\begin{array}{c}\text{Diam. paulo min.}\\ 3,819\,(3)\end{array}\right.$

Quarum dimidia ducta in semiperipheriam 6. Pert. *juxta Archimedis Prop.* I *de Circ. dimens*. dabunt aream circuli A B C 11, 460 (3) vera paulo majorem, & 11,457 (3) vera paulo minorem. Q. E. D.

THEOREMA V.

Triangulum isopleuron est ad Hexagonum regulare sibi isoperimetrum, ut 2 ad 3, ad Quadratum vero ut 4 ad $\sqrt{27}$.

DEMONSTRATIO.

Cum ex præcedentibus manifestum sit, Triangulum isopleuron esse ad Hexagonum regulare sibi isoperimetrum, ut $4\sqrt{3}$ ad $6\sqrt{3}$ id est: ut $\sqrt{48}$ ad $\sqrt{108}$, uterque terminus per $\sqrt{12}$ tanquam communem mensuram maximam dividatur, habebisque pro Triangulo 2 & pro Hexagono 3. Eodem modo $\sqrt{48}$ & 9, per communem mensuram maximam $\sqrt{3}$ dividantur, & pro Triangulo invenies 4, pro Quadrato autem $3\sqrt{3}$ sive $\sqrt{27}$. Q. E. D.

§. 10. Circa adductas figurarum isoperimetrarum rationes notandum est, quod illæ non tantum competant figuris præsentibus, quarum peripheriam fecimus 12 Pert. sed quod sint universales, ac figuris omnibus isoperimetris regularibus, sive majorem, sive minorem perimetrum habeant, applicari possint; ut sequitur ex 20 VI *Euclid*. Sumamus exempli loco Triangulum isopleuron, & Hexagonum regulare, quorum perimeter sit major, & quidem 36 Pert. Dico: quod nihilominus Triangulum hoc ad Hexagonum sibi isoperimetrum rationem habeat, quam 2 ad 3. Nam Trianguli perpendiculum esset $\sqrt{108}$ sive $6\sqrt{3}$, quæ ducta in basis semissem 6, producit Trianguli aream $36\sqrt{3}$, sive $\sqrt{3888}$.

Hexa-

Hexagoni autem quodlibet latus contineret 6 Pert. ejusque perpendicularis esset $\sqrt{27}$, quæ ducta in semiperipheriam 18, producit aream $\sqrt{8748}$. Hæ duæ areæ, $\sqrt{3888}$ & $\sqrt{8748}$ per communem earum mensuram maximam $\sqrt{972}$ dividantur, & invenies pro Triangulo 2, & pro Hexagono 3. Idem de reliquis harum figurarum rationibus sentiendum est.

THEOREMA VI.

Circulus est omnium figurarum rectilinearum regularum sibi isoperimetrarum, maximus.

DEMONSTRATIO

Quod inter figuras regulares isoperimetras maxima sit illa, quæ plures angulos plurave latera continet, demonstravit *Clavius*, *Geom. Pract. Lib. VII Prop. VI pag.* 296. & apud Geometras omnes in confesso est, ut etiam Axiomatis Geometrici loco de isoperimetris dixerint: *Figura regularis, quo terminatior*, (id est, quo plura latera & plures angulos continet) *eo capacior*. Circulus autem nihil aliud est, quam Polygonum infinitorum laterum ac angulorum, in qualibet enim sui parte, Circuli peripheria est incurvata & angulata, ut merito dicatur *Angulus perpetuus & continuus*, nisi etiam a qualibet sui parte utrinque in angulum recederet, recta circulum in pluribus quam in unico puncto tangeret, contra 13. III *Euclidis*. *Et sane*, (ut verbis utar *Bettini in Ærario Philos. Mathem. Lib.* 1. §. 3. *pag.* 86.) *si quamlibet figuram regularem multangulam velis ad Circulum redigere, necesse est, ut qualibet partes rectarum, quæ intercedunt inter angulos, infringantur & ipsæ in angulos. Nec ante ambitus poterit fieri perfecte circularis, nisi omnes omnino particulæ incurventur, & inter se inclinentur, sive angulentur.* Cum ergo Circulus infinita quasi habeat latera, infinitosque angulos, pro punctorum, quæ in peripheria ejus concipi possunt, multitudine, erit etiam omnium figurarum regularium sibi isoperimetrarum maximus. Q. E. D.

Alii hac utuntur Demonſtratione.

Conficiunt Polygonum quodcunque, exempli gr. Hexagonum *Fig.* IIX, cui Circulum iſoperimetrum conſtituunt, qui ſit HDE *Fig.* X huic *per 12. IV. Euclid.* Polygonum ſimile ILGF, circumſcribunt. Deinde ex puncto contactus E ad centrum D, ducunt rectam ED, quæ tangenti FG perpendicularis eſt, juxta 18. III *Euclid.* Ex centro quoq; alterius Polygoni V, *Fig.* IIX, demittunt perpendicularem VY, quæ latus WX biſecat *per 3. III. Eucl.* Ductis quoque rectis VW & DF, quæ angulo W & F *per hypoth.* æquales, bifariam ſecant, tertius V tertio D æqualis erit, *per 32. I. Euclid.* Cum ergo Triangula VWY & DFE ſint æquiangula, erunt quoque ſimilia per 4 VI *Euclidis* hoc eſt: WY erit ad YV, ut FE ad ED, ſed FE major eſt WY, quia Polygoni circulo circumſcripti ambitus, circuli peripheria, (quæ *per hypoth.* peripheriæ Fig. IIX æquatur) major exiſtit, per *Axioma 2. Archimed.* Ergo etiam ED major erit quam YV *juxta 14. V. Euclid.* Atque ita rectangulum contentum ſub DE & ſemiperipheria circuli, majus erit rectangulo, comprehenſo ſub VY & ſemiperipheria Polygoni iſoperimetri cujuscunque. Circulus igitur omnium figurarum rectilinearum regularium ſibi iſoperimetrarum maximus eſt. Q.E.D.

§. 11. Ex Theorematibus præcedentibus ſequentia ſua ſponte fluunt πορίσματα, ſeu ſtricte ac proprie ſic dicta

COROLLARIA.

I. Qui Agri quantitatem ex peripheriæ magnitudine æſtimant, valde errant.

II. Figurarum iſoperimetrarum regularium maxima eſt illa, quæ plures continet angulos, plurave latera.

III. Ex iſoperimetris homogeneis figura regularis irregulari major eſt.

IV. Circulus abſolute & ſimpliciter omnium figurarum ſibi iſoperimetrarum, maximus eſt.

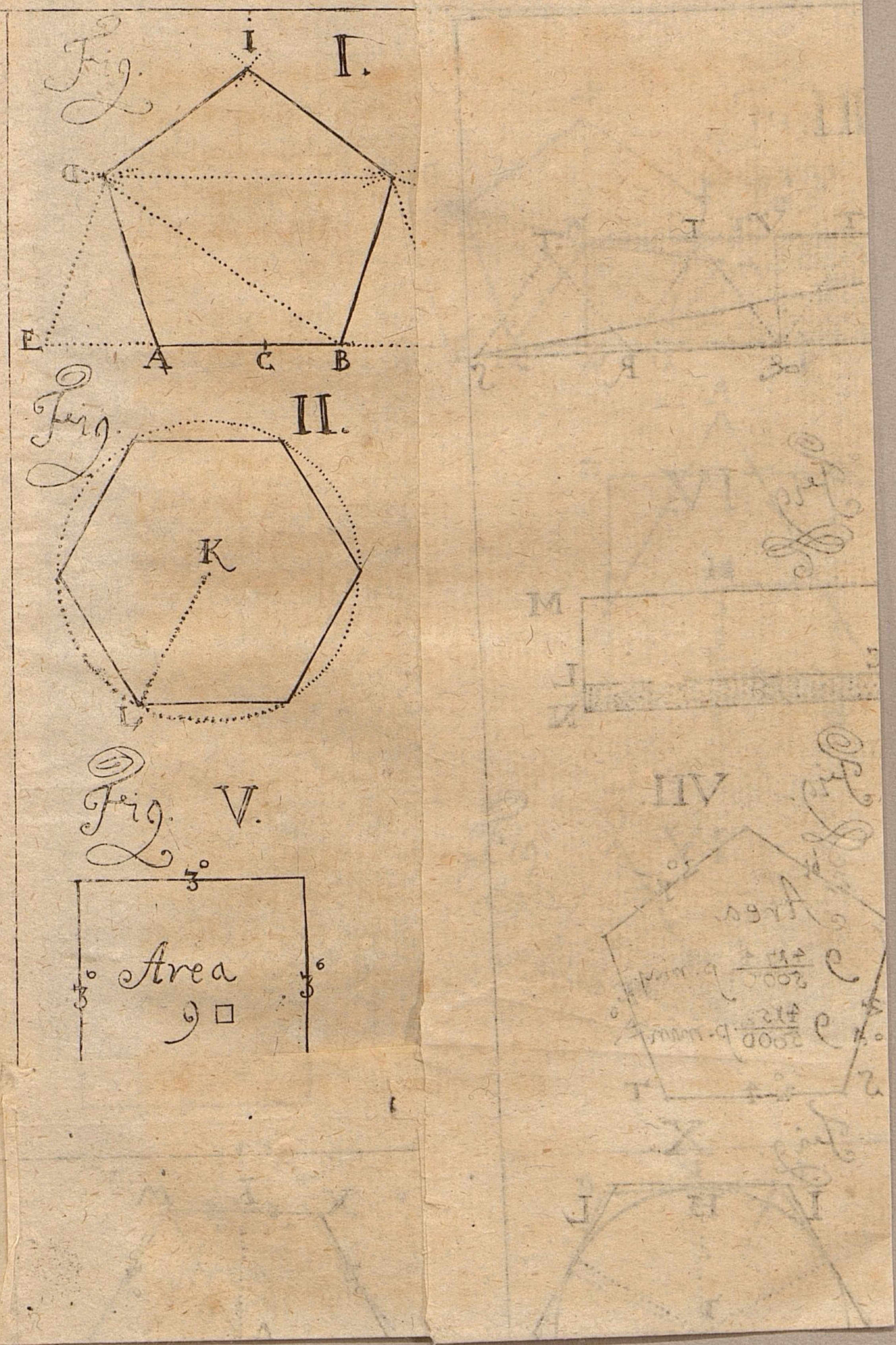
Fig. I.
I
D
E
A
C
B
Fig. II.
K
L
Fig. V.
3°
Area
9 □
3°
3°

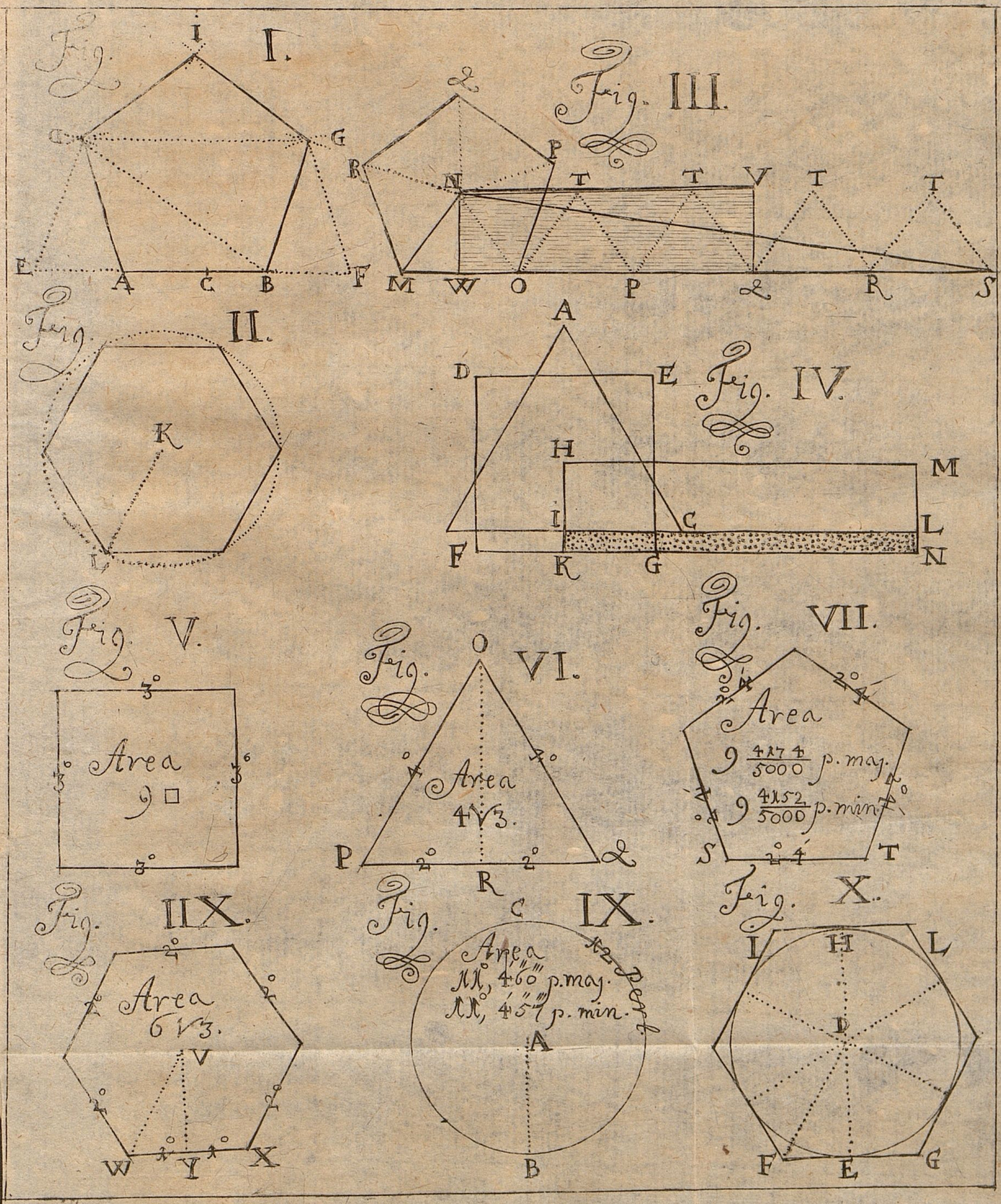
Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Area
9 □
Fig. VI.
Area
4√3.
Fig. VII.
Area
9 4174/5000 p. maj.
9 4152/5000 p. min.
Fig. IIX.
Area
6√3.
Fig. IX.
Area
11°, 4′ 6″ 0‴ p. maj.
11°, 4′ 5″ 7‴ p. min.
12 Perif.
Fig. X.

COROLLARIA RESPONDENTIS.

I. Scriptura S. I. *Reg.* VII. *verſ.* 23 & 24, item II *Chron.* IV. *verſ.* 2. ad Geometricam veritatem omnino loquitur, ut nihil hic nefarii S. Scripturæ cenſores habere queant, quod cavillentur. Contra *Spinoſam*, qui in *Tract. Theol. Polit. cap.* II. ex hoc loco deducere conatur: *aut Salomonem non fuiſſe Mathematicum, aut Scriptorem* θεόπνευστον *errorem commiſiſſe.* Et *Lansbergium*, qui in *Tract. de Motu Terræ* ex hoc loco concludit: *Scripturam S. non loqui Geometrice, ſed populari & recepto more.*

II. A veritate Geometrica longe abeſt *Ramus*, dum *Geometriæ ſuæ Lib. IV. Elem. II.* de Figuris iſoperimetris ita loquitur: *Triangulum Æquilaterum eſt majus iſoperimetro inæquilatero, & Æquicrurum Vario.* Varium enim plerumque æquicruro majus eſt.

III. Punctum, linea, & ſuperficies, etiam citra mentis operationem dantur. *Monantholius Lib. de Puncto Cap.* 2.

IV. Punctum, linea & ſuperficies merito nihil dicuntur. *Conf. Weigelii Phil. Mathem. P. I. Def.* 4 *pag.* 12. *ſeqq.*

V. Punctum tangens punctum, cum ipſo coincidit. *Idem Phil. Mathem.* P. II. *pag.* 74.

VI. Parallelogrammum quodcunque finitum, eſt æquale parallelogrammo, quod in infinitum prolongari poteſt.

VII. Modus inveniendi duas medias proportionales, quem propoſuit *Heinlinus Geometriæ ſuæ Lib.* IV. *pag.* 228. ἀκρίβειαν γεωμετρικὴν minime ſapit: poſitis enim duabus extremis, 8 & 64 Pert. provenit mediarum minor, adhuc minor 15, 05 (2) quæ debebat eſſe 16 Pert. & mediarum major, adhuc major 34 Pert. quæ debebat eſſe 32 Pert.

Μόνῳ τῷ Θεῷ δόξα.

Q. D. B. V.

DISSERTATIO GEOMETRICA
DE

FIGURIS PLANIS ISOPERIMETRIS REGULARIBUS,

Quam

RECTORE MAGNIFICENTISSIMO,
SERENISSIMO PRINCIPE AC DOMINO
DN.
FRIDERICO WILHELMO,
MARCHIONE BRANDENBURGICO ET ELECTORATUS
HEREDE, AC RELIQUA,

IN ILLUSTRI FRIDERICIANA
Amplissimæ Facultatis Philosophicæ indultu,
publico Eruditorum Examini subjiciunt

PRÆSES
M. LUCAS BESELIN,
Ejusdem Facult. Adjunctus.
&
RESPONDENS
WICHMANNUS CAROLUS Knoch/
Halberst. Saxo, S. Theol. & Phil. Stud.

Ad d. ~~VII.~~ 16 April. MDCC.

Halæ, typis Christophori Andreæ Zeitleri, Acad. Typogr.