Ioannes Christophor,
Hermin.
Iustè, Candidè, Ho-
nestè.
Æternitas pro Scopo!

INSTITVTIONVM ARITHMETICARVM LIBRI QVATVOR.

In quibus,

REGVLIS ET EXEMPLIS PRACTICIS,

BREVISSIME ET CLARISSIMÈ explicantur.

Quatuor numerorum genera.

I. Rationales abſoluti.
II. Rationales coſſici.
III. Irrationales abſoluti.
IIII. Irrationales coſſici.

CVM

APPENDICE FRACTIONVM ASTRONOMICARVM.

ET

Indice capitum, articulorum, & rerum præcipuarum.

I.C.H.

AB

IOANNE LANTZ,
è Societate IESV conſcripti.

MONACHII apud Nicolaum Henricum.

M. DC. LXVII.

NOBILISSIMO ET AMPLISSIMO VIRO, DOMINO IOANNI GEORGIO HERWART AB HOHENBVRG I. V. D. SERENISSIMO BOIORVM duci ab intimis consiliis, Præsidi Prouinciæ Schwabæ, & inclitorum vtriusq; Bauariæ ordinum cancellario, &c.

NON diu de Patrono, cui hanc meam de numerandi ratione, lucubratiunculam sua auctoritate tuendam offerrem, cogitandum fuit. Nam cui potius Arithmeticam dicarem, quam principi Arithmeticorum, & in omni alia literatura versatissimo? Sunt & aliæ prope mille causæ, quæ mihi hoc consilium dictarunt, vt nomini M. V. laborem hunc meum inscriberem: quarum postrema non est, quod hæc ipsa Arithmetica consilio, auspicijs, & liberlitate M. D. V. in lucem prodit. Quæ vtinam ita numeris suis absoluta prodiret, vt tanti viri patrocinio digna videri poſſet. Etenim quo is, cui dona offeruntur in altiore cum honoris, tum ſcientiæ gradu eſt conſtitutus, tanto qui dicantur libri par eſt eſſe excellentiores. Quod cum animo agitarem, videremq; magnam inter hanc Arithmeticam, & patroni doctrinam intereſſe interuallum, vix auſus fui, illam ad aram eius ſuſpendere. Verum cum mihi M. D. V. erga omnes, cuiuſcumq; ſint literaturæ ſingularis quædam propenſio, ignota non eſſet, animum reſumpſi, & nemini, niſi M. V. eam conſecrandam existimaui. Quamobrem maiorem in modum peto, vt eo animo in ſuum illam patrocinium ſuſcipiat, quo offertur. Quodſi, vti non dubito, fecerit, multis me nominibus iam ante ſibi obnoxium, pluribus adhuc obſtringet. Ingolſtadij 4. die Octob. Anno ſalutis reparatæ 1666.

M. D. V. D.

Ioannes Lantz.

AD CANDIDVM LECTOREM.

HOs *quatuor Arithmeticorum libros, candide lector, non eo consilio scripsi, quod opiner facilius ex illis, quam ex aliorum laboribus numerandi artem hauriri. Non ita mea amo; non ita insanio. Quin omnium conatus laudandos censeo: quamquam, vt hominum ingenia alia alijs perspicaciora sunt, non nesciam, alium alio, si vniuersam artem spectes, felicius, & explicatius animi sensa promere: si ad particularia descendas, in singulis seorsim reperiri, in quo iure suo gloriari, & alijs præferri possit. Quæ cum ita esse viderem, conatus sum ex varijs Arithmeticis præcipua, quæ ad numeros spectant, seclusis secretioribus quibusdam, olim à Diophanto, auorum memoria à Cardano, & Stiphelio, nostra à Francisco Vieta, Ioanne Faulhabero, & aliis proposita, nec dum tamen, quod sciam, satis clare pro vulgi captu explicata, colligere, taliq; methodo discentibus proponere, vt absq; magi-*

ſtro ex libello, ſi molem ſpectes, exiguo; ſi quæ continet, bene magno, Arithmetici eſſe poſſent. Quanquam non ſine ſudoribus, quando τῆς ἀρετῆς, vt habet Heſiodus ἱδρῶτα θεοὶ προπάροιθεν ἔθηκαν ἀθάνατοι. Cæterum ne præpoſterè rem aggrediatur Lector, & voti tardius, quam vellet, compos fiat, omnino librum primum, elementa inquam tam integrorum, quam fractorum numerorum: regulam item proportionum, & radicum extractiones apprimè diſcat, penituſq; combibat ante, quàm ad tres poſteriores gradum faciat, neceſſe eſt. Quod ſi fecerit, facile poſteriores, dum aliquem laborem impendat, ſcientia comprehendet. Si neglexerit, fruſtra erit omnis labor, niſi ingenij bonitas, aut labor improbus, quæ vel adamantina vincunt, ſuppetiatum eant. Vale Lector, & noſtris hiſce laboribus faue, & fruere.

AVCTO-

AVCTORITAS R. P. PROVINCIALIS.

ARITHMETICAM Practicam Ioannis Lantz è Societate nostra, à destinatis nostræ Societatis Patribus harum rerum peritis, lectam & probatam; Ego Melchior Härtelius Societatis IESV per superiorem Germaniam præpositus Prouincialis, facta mihi potestate ab Admodnm R. P. N. Mutio Vitellesco eiusdem Societatis præposito Generali, in lucem edi permitto. Cui rei testandæ manu mea subscripsi, & Sigillum Societatis consuetum appressi. Landspergæ 3. Octobris, Anno salutis. M. DC.LXVI.

Melchior Härtelius.

INSTITUTIONUM ARITHMETICARUM LIBER PRIMUS.

DE NUMERIS RAtionalibus absolutis.

NUMERUS rationalis absolutus, est numerus vulgaris omni carens denominatione. De quo hæc pertracto. Primo ago de Elementis numerorum integrorum. Secundo de elementis fractorum. Tertio de regulis, & praxi. Quarto de numerorum proprietatibus. Quinto de radicum extractionibus.

CAPUT I.

DE INTEGRORUM NUmerorum elementis.

Elementa Arithmetica, sunt quatuor vulgatæ species Additio, Subtractio, Multiplicatio, & Diuisio; quibus quidam Numerationem addunt. Nos de omnibus quinque, initium à Numeratione facientes, breuiter agemus.

ARTICULUS I.

DE NUMERATIONE.

Numeratio est enunciatio, & expreßio valoris cuiuscuniuſcunque numeri propoſiti. Supponimus autem hos decem characteres 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. ad hanc Arithmeticam accedentibus, notos eſſe. Porrò, vt quemcumque numerum propoſitum methodicè pronunciemus, hæc ſunt animaduertenda.

Primò, circularem hanc figuram 0, quam cyphram appellamus, per ſe quidem nihil valere; ſed additam reliquis, eas per denariam denominationem augere: ita 20, valent viginti, cum 2, duo tantum valeant. 200, valent ducenta. 2000, duo millia. 20000, viginti millia. 200000, ducenta millia &c.

Secundò, quemlibet numerum verſus dextram primo loco poſitum, ſeipſum ſignificare ſemel; ſecundo decies; tertio centies; quarto millies; quinto decies millies; ſexto centies millies; ſeptimo, millies millies; Octauo decies millies millies, &c.

Tertiò, vt facilius numerus propoſitus enuncietur, poni ſub quarto verſus ſiniſtram, punctum, &, duobus prætermiſsis, ſub ſeptimo; rurſuſq; duobus prætermiſsis, ſub decimo; itemque duobus prætermiſsis, ſub decimo tertio, &c.

Quartò, quot ſunt puncta, toties dicendum eſſe millies; ſed ſub penultimo puncto verſus dextram, pro millies, dicendum millena, ſub vltimo millia.

Quintò, tot eſſe membra quot ſunt puncta; & numerum habentem punctum ſemel; ſecundum à puncto verſus ſiniſtram decies; tertium centies, ſeipſum ſignificare.

Vltimò, cyphrarum, ſeu circulorum, nullam penitus habendam rationem, niſi quantum ad augmentum.

His ita animaduersis hæc exempla ſic pronunciabimus.

4634276598542754

42003120676000760

849089000080787900

1000000000000000000

Primum. Quater millies, millies, millies millena millia; ſexcenties tricies quater millies, millies millena millia: ducenties ſeptuagies ſexies millies millena millia: quingenties nonagies octies millena millia: quingenta quadraginta duo millia; ſeptingenta, quinquaginta quatuor.

Secundum. Quadragies bis millies, millies, millies millena millia: ter millies, millies millena millia: centies vicies millies millena millia: ſexcenties ſeptuagies ſexies millena millia: ſeptingenta ſexaginta.

Tertium. Octingenties quadragies nouies millies, millies, millies millena millia: octogies nouies millies, millies millena millia: octogies millena millia: ſeptingenta octoginta ſeptem millia, nongenta.

Poſtremum. Millies, millies, millies, millies millena millia.

ANNOTATIO.

Poteſt pronunciatio etiam fieri per milliones, more Italorum (ſignificat millio millies millena) Noto autem puncta millionum ſupra figuras hac nota o; ac prima quidem ponitur ſupra ſeptimam figuram; ſecunda, quinq; prætermiſſis, ſupra decimam tertiam, hoc modo. 67312507064340. *qui numerus ſic pronunciatur. Sexaginta ſeptem milliones, millionum*

num: trecenti duodecim milleni milliones: quingenti ſeptem milliones: ſexaginta quatuor millia, trecenta quadraginta.

Poſſunt quoq; puncta ſub centenarijs, & denarijs poni hoc modo, 40000000000, *qui numerus ſic pronunciatur. Quater millies centies centena millia. Aut hoc modo* 40000000000. *& ſic effertur. Quater millies centies decies millena decies. Quæ pronunciationes faciles ſunt, ſi diligenter ad puncta attendatur, vt ex ſequentis exempli variatione apparet.*

1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0. *decies millies millena millia.*
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0. *centies centena millena millies*
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0. *millies centies centena millia.*
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0. *millies centies millena centies.*
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0. *decies cẽties millena millia dec.*

Poteſt idem exemplum adhuc pluribus modis pronunciari, vt quilibet videt. Duriuſculæ videntur quædam dictarum pronunciationum, non inficior; ſed artem, non verba conſidera.

ARTICVLVS II.

DE ADDITIONE.

Additio eſt duorum, aut plurium numerorum in vnam ſnmmam collectio. Quæ collectio, vt accuratior ſit, hæc obſeruentur.

Primo, numeri ſibi mutuo perpendiculariter ſupponantur, primus verſus dextram ſub primo, ſecundus ſub ſecundo, tertius ſub tertio &c. & defectus, ſi quis fuerit, ex parte ſiniſtra relinquatur, vt in ſecundo, & tertio exemplis, factum vides.

Secundo, in operando procede à dextra verſus ſiniſtram,

ſtram, colligens in vnam ſummam omnes numeros primo loco verſus dextram poſitos. Quæ ſumma ſi vna figura ſcribi poſsit, ſcribatur infra lineam directè ſub numeris primo loco poſitis: ſi vna figura ſumma illa ſcribi non poſſit, ſcribatur minor, hoc eſt, quæ verſus dextram eſt, infra lineam; maior, quæ verſus ſiniſtram eſt, retineatur pro ſequente operatione.

Tertiò, cyphræ hîc, vt & in reliquis ſpeciebus, nihil penitus curandæ ſunt. His obſeruatis ſequentia exempla facilè addemus.

Primum exemplum; Sint in vnam ſummam colligendi hi numeri, 4253, 3425. collocatione vt dictum eſt facta. Dico primo 3. & 5. faciunt 8; quibus infra lineam poſitis, Dico ſecundo 5. & 2. faciunt 7; quibus quoque infra lineam poſitis, Dico tertio 2. & 4. faciunt 6; & his infra lineam poſitis, Dico vlt. 4. & 3. faciunt 7. Numeri ergo 4253. & 3425. in vnam ſummam collecti, faciunt 7678.

4253
3425
7678

Secundum exemplum. Sint addendi hi tres numeri, 8765. 5794. 980. Collocatione facta, Dico primo 5. & 4. (nam cyphra non curatur) faciunt 9; quibus infra lineam poſitis, Dico ſecundo 6. 9. & 8. faciunt 23; pono figuram dextram, hoc eſt, 3. infra lineam, retineo 2; & dico 7. 7. 9. & 2. prius retenta, faciunt 25: pono 5. infra lineã, directe ſub 9. retineo 2, & dico vlt. 8. 5. & 2. retẽta faciunt 15. pono totũ infra lineam, nimirũ 5. ſub 5; 1 paulo remotius verſus ſiniſtrã. Si ergo 8765. 5794. & 980. in vnam ſummam colligantur, fient 15539.

8765
5794
980
15539

Tertium exemplum. Sint hi numeri 7500402. 980091. 75215. 5501. 900. addendi. Collocatione facta,

cta, vt defectus ex parte sinistra relinquatur. Dico primo 2. 1. 5. & 1. faciunt 9; quibus infra lineā positis. Dico secundo 9, & 1. faciunt 10; pono 0. infra lineam, retineo 1. Dico tertio 4. 2. 3. 9. & prius retentum, faciunt 19; pono 9 infra lineam, retineo 1. Dico quarto 5. 5. & prius retentum, faciunt 11. pono 1. infra lineam, retineo 1. Dico quinto 8. 7. & retentum faciunt 16; pono 6 infra lineam, retineo 1. Dico sexto 5. 9. & retentum, faciunt 15; pono 5. infra lineam, retineo 1. dico vltimo 7. & retentum faciunt 8. Ergo summa dictorum numerorum est 8561909.

$$\begin{array}{r} 7500402 \\ 980091 \\ 75215 \\ 5301 \\ 900 \\ \hline 8561909 \end{array} \quad \frac{2}{2}$$

EXAMEN.

Abiice 9. quoties potes, tam ex numeris addendis, quam ex addito, hoc est, tam ex supra, quam ex infra lineam positis, nulla habita ordinis, aut loci ratione; si enim residua æqualia fuerint, probabile est operationem bene habere. Ita vides in primo exemplo post abiectionem 9. restare 1. & 1; in secundo 5. & 5; in tertio 2. & 2. Si residua fuerint inæqualia, certum est erratum esse: quare operatio iteranda erit. Dixi si residua æqualia fuerint, probabile esse operationem bene habere, nam certum non est; siquidem in apposito exemplo, residua sunt æqualia, at in operatione plurimum erratum est.

$$\begin{array}{r} 358 \\ 234 \\ \hline 835 \end{array} \quad \frac{7}{7}$$

ARTICVLVS III.

DE SVBTRACTIONE.

Sub-

Subtractio eſt ſubductio minoris numeri ex maiore, aut ęqualis ex æquali. Et vt melius, quomodo numerus ex numero ſubducatur, intelligas, hæc obſerua.

Primo minor numerus, hoc eſt, ſubducendus, ſupponendus eſt maiori, ſiue illi, ex quo fit ſubductio; & defectus, ſi quis fuerit, ex parte ſiniſtra relinquendus.

Secundo, ſi figura inferior maior fuerit ſuperiore, intellige ad ſuperiorem aſſumpta eſſe 10. quæ vt compenſes appone ſequenti figuræ punctum, quod in ſequente operatione pro vnitate numerandum eſſe memineris.

Tertio, etiam hic cyphræ non ſunt curandæ.

His obſeruatis ad exempla accedimus. Primũ, volo 253 ex 485 ſubtrahere. Collocatis numeris more conſueto, Dico primo 3 ex 5, reſtant 2; quibus infra lineam directè ſub 3 poſitis, Dico ſecundo 5 ex 8, reſtant 3; quibus quoque infra lineam poſitis, dico vltimo 2 ex 4, reſtant 2 quæ pono infra lineam. Igitur ſubtractis 253 ex 485, reſtant 232.

485
253
232

Secundum exemplum ſint 4297, ex 7345 ſubtrahenda. Collocatis numeris, vt cernis, Dico primo 7 ex 5, quod cũ fieri non poſſit, pono ſub proximè inferiore, nempe ſub 9 punctũ, & intelligo ad 5 aſſumpta eſſe 10. Quo facto dico 7 ex 15, reſtant 8; quibus infra lineam poſitis, dico ſecundo 10 ex 4 (nam 9, & punctum, quod vnum valet, faciunt 10) dico inquam, 10 ex 4, quod cum fieri nequeat, pono ſub 2, punctum, & intelligo 10 ad 4 aſſumpta, vt fiant 14. Dico ergo 10 ex 14, reſtant 4, quibus infra lineam poſitis, Dico tertio 3 ex 3, reſtat 0, ſiue nihil; pono ergo 0 infra lineam; Dico poſtremo 4 ex 7,

7345
4297
3048

reſtant

reſtant 3. Si ergo 4297, ex 7345 ſubtrahantur, reſtant 3048.

Tertium exemplum. Sint 70099 ex 801200 ſubtrahenda. Collocatis numeris more ſolito, Dico primo 9 ex 0 accipere non poſſum; pono ergo ſub ſequente, nempe ſub 9, punctum, & intelligo 10 ad 0 primum aſſumpta; dico ergo 9 ex 10, reſtat 1, quo infra lineam poſito, Dico ſecundo 10 ex 0 accipere non poſſum; poſito igitur ſub ſequente 0 puncto, Dico 10 ex 10, reſtat 0, quo infra lineam poſito, Dico tertio 1 (punctum enim vnum valet) ex 2, reſtat 1. Dico quarto 0 ex 1. reſtat 1. Rurſus dico 7 ex 0, quod cum fieri non poſſit, pono punctum ſub 8, & dico 7 ex 10, reſtant 3; quibus infra lineam poſitis, dico vltimo 1 ex 8, reſtant 7. Si ergo 70099 ex 801200 ſubtrahantur, reſtant 731101.

801200	2
. 70099	2
731101	

EXAMEN.

Abiice 9, quoties potes, tam ex ſupremo, hoc eſt, ex quo facta eſt ſubtractio; quam ex duobus inferioribus, hoc eſt, ex ſubtrahendo, & reſiduo: ſi namque facta illa abiectione reſidua æqualia fuerint, probabile eſt operationem bonam eſſe: ſi verò æqualia non fuerint, certum eſt erratum eſſe. Ita vides in primo exemplo, reſidua eſſe, 8 & 8; in ſecundo 1 & 1; in tertio 2 & 2. Dixi ſi reſidua æqualia fuerint, probabile eſſe operationem bonam eſſe: ſiquidem fieri poteſt, quam-

quamuis rarò, vt probatione bona existente, operatio viciosa sit, vt in adiecto exemplo patet.

427	4
363	4
235	

Certissimum est operationem bonam esse, si, duobus inferioribus inuicem additis, prodeat superior. Potest itaque subtractio per Additionem; sed & Additio per subtractionem probari; si omnes addendi sigillatim ex summa subtrahantur, nihilq; remaneat. Vt si in secundo Additionis exemplo 8765 subtrahantur ex 15539; ex residuo 5794; & rursus ex residuo 980. nihilque remaneat, erit operatio bona.

Articulus IIII.

De Multiplicatione.

Multiplicatio est inuentio numeri, in quo alter multiplicantium toties continetur, quoties in altero vnitas. Vt si multiplicentur 8 per 4. producentur 32. in quo numero toties continentur 4; quoties in 8 vnitas; vel in 32. toties continentur 8. quoties in 4. vnitas. Sed antequam ad Multiplicationem veniamus, proponenda prius est mensa Pythagoræ, & regula, quā vocāt Pigri; quarum vtraq; tantum vsque ad 9. extenditur, etsi mensa Pythagoræ in infinitum

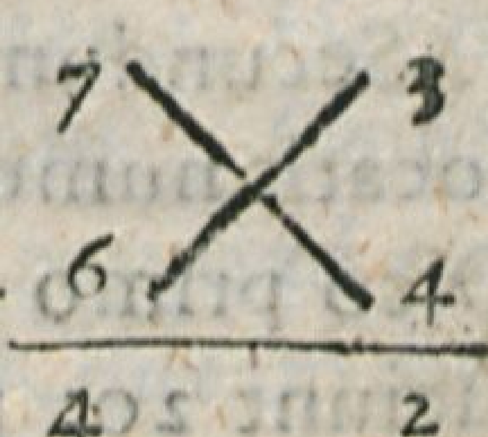
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

extendi poſſit. Menſæ huius ſtructura facilis eſt.

Vſum eius accipe. Volens ſcire, quantum faciant octies 9; quæro 8 in capite, 9 in latere ſiniſtro tabulæ; vel contra 9 in capite; 8 in latere; vtrum enim fecero, offeret angulus communis 72. Item volens ſcire quantum faciant ſexies 7, quæro 6 in capite, 7 in latere; vel contra, vtrum enim fecero, offeret angulus communis 42.

Regula Pigri ſic habet. Suppono ſibi mutuo numeros in ſe ducẽdos, illiſq; verſus dextram tantum appono, vt fiant 10. Quo facto numeros appoſitos duco in ſe, productum, ſi vna figura ſcribi poſſit, pono infra lineam; ſi non poſſit, ſcribo infra lineam figuram dextram, retineo ſiniſtram: poſtremo numeros appoſitos per crucem ex prioribus numeris ſubtraho, reſiduum cum retento pono infra lineam, & habeo quæſitum. Exemplum. Volo ſcire quantum faciant octies 9: ſuppono ſibi mutuo 8 & 9; atque ad latus dextrum 9 pono 1; ad latus 8, 2, vt fiant 10, & dico ſemel 2 facit 2, quibus infra lineam poſitis, ſubtraho per crucem, vel 1 ex 8; vel 2 ex 9, vtrum enim fecero, reſtabunt 7, quibus infra lineam poſitis, video octies 9 facere 72.

Aliud exemplum. Volo ſcire quantum faciant ſexies 7; ſuppono ſibi mutuo 6 & 7, & dextrorſum illis appono 3 & 4, vt 10 fiant. Deinde dico ter 4 facit 12: poſitis igitur 2 infra lineam, retento 1, ſubtraho vel 3 ex 6; vel 4 ex 7, vtrum enim fecero, reſtant 3, quæ ſi cum prius retento ponam infra lineam, video ſexies 7 facere 42.



His expeditis nota primo, etſi integrum ſit, quemcunque multiplicantium in superiore loco collocare; conueniens tamen esse, vt maior superiorem, minor occupet inferiorem.

Secundo, defectum, si quis fuerit, ex parte sinistra relinquendum.

Tertio, si inferior plures figuras habuerit, omnes inferioris in omnes superioris sigillatim esse multiplicandas, & primas productorum figuras sub propriis inferioris multiplicantis figuris collocandas, & reliquas ordine sinistrorsum.

Quarto omnia producta in vnam summã colligenda.

His notatis, exempla proponimus. Primum sint 4654 per 6 multiplicanda. Collocatis numeris, vt vides Dico sexies 4 faciunt 24: pono 4 infra lineam, retineo 2. Dico rursus sexies 5 faciunt 30, quæ cum 2 retentis faciunt 32: positis igitur 2 infra lineam, & retentis 3, Dico tertio sexies 6, faciunt 36, quæ cum 3 retẽtis faciunt 39: positis ergo 9 infra lineã & retentis 3, dico postremo sexies 4 faciunt 24, quæ cum tribus retẽtis faciunt 27; pono totum infra lineam, quod in fine semper fit.

```
 4654
    6
-----
27924
```

Secundum. Sint 92075 per 234 multiplicanda. Collocatis numeris, vt defectus ex parte sinistr relinquatur, Dico primo, Quater 5, faciunt 20: pono o infra lineam directè sub 4, retineo 2. Dico secundo quater 7 faciunt 28, quæ cum 2 retentis faciũt 30: pono o infra lineam, retineo 3.

```
   92075
     234
--------
  368300
 276225
184150
--------
21545550
```

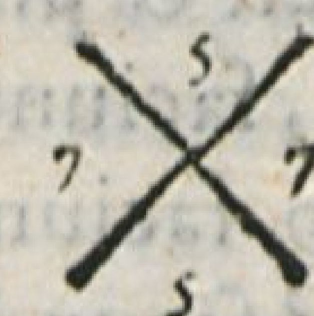
dico

dico tertio quater 0 est 0; pono infra lineam 3 retenta. Dico quarto quater 2, faciunt 8; pono 8 infra lineā. Dico postremo quater 9, faciunt 36 pono totum infra lineam. Pergo iam ad secundam figuram 3 quam multiplico in omnes figuras superioris multiplicantis, hoc modo, Ter 5 faciunt 15: pono 5 infra lineā directè sub 3; retineo 1. Dico secundo ter 7, faciunt 21; quæ, & prius retentum faciunt 22: pono 2 infra lineam retineo 2. Dico tertio ter 0 est 0; pono infra lineam 2 prius retenta. Dico quarto ter 2 faciunt 6. Dico vltimo ter 9 faciunt 27. Pergo deniq; ad tertiam figuram 2, & dico, bis 5 faciunt 10: pono 0 directè sub 2, retineo 1. Dico secundo, bis 7, &c. His expeditis addo inuicem tres numeros duabus lineis inclusos, & conflo 2154550.

Tertium exemplum. Sint multiplicanda 23002, per 5004. Collocatis numeris, vt cernis, Dico primo, quater 2, sunt 8; quibus infra lineam positis, Dico secundo quater 0 est 0: posito igitur 0 infra lineam, dico tertio quater 0 est 0; quo infra lineam posito, Dico quarto quater 3 faciunt 12: pono 2 infra lineam, retineo 1. Dico vltimo quater 2, faciunt 8, quæ cum prius retento pono infra lineam. Deinde omissis cyphris inferioris multiplicantis, pergo ad 5, & dico quinquies 2, faciunt 10: pono 0 infra lineam directè sub 5, retineo 1. Dico secundo quinquies 0 est 0: pono infra lineā prius retentū, & dico quinquies 0 est 0, positoq; 0 infra lineam dico quinquies 3 faciunt 15, &c. Hoc facto numeros lineis inclusos addo, & conflo

```
   23002
    5004
   -----
   92008
115010
---------
115102008
```

fio 115102008. Nota si in principio vnius, vel vtriusq; multiplicãtis sint cyphræ, eas statim infra lineam ponendas, & cum reliquis figuris agendum, vt est dictum.



6800
2300
2040000
136
15640000

Exempli causa, si sint 6800 per 2300 multiplicanda, ponantur 4 cyphræ infra lineam, & cum reliquis figuris instituatur operatio more consueto.

EXAMEN.

Abiice ex vtroq; multiplicante 9, quoties potes residua in inferiore, & superiore crucis parte posita, in se ducito: ex producto reiicito rursus 9, quoties potes, residuo in alterutro crucis latere posito: cui si residuũ producti ęquale fuerit probabile est operationẽ probã esse: si æquale non fuerit, certũ est, erratũ esse. Ita reiectis ex vtroq; multiplicãte 9, quoties fieri potest, residua sunt in 1. exemplo, 1 & 6. in secundo 5 & 0. In tertio, 7 & 0. In quarto 5, & 5. His in se ductis, producuntur in primo exemplo, 6. In secũdo, 0. In tertio, 0. In quarto 25. Ex his rursus reiectis 9 (quanquã in tribus prioribus exemplis non sit neceesse) quoties fieri potest, restant in primo exemplo 6. In secundo, 0. In tertio, 0. In quarto 7. His residuis, quia residua productorum æqualia sunt, probabile est operationes probas esse; non tamen certum. Nam etiam hic potest, examine bono existente, operatio viciosa esse.

ARTICVLVS V.

DE DIVISIONE.

Diui-

Diuiſio eſt inuentio numeri in quo toties continetur vnitas, quoties Diuiſor in diuidendo. Vt ſi diuidantur 20 per 4, prouenient 5; in quo numero toties vnitas continetur, quoties 4 in 20.

Vel diuiſio eſt inuentio numeri, qui toties in diuidendo continetur, quoties vnitas in diuiſore. Quoties enim vnitas in 4 continetur, toties continenrur 5 in 20. Vocatur numerus inuentus, tum quotiens, ſeu quotus, tum proueniens.

Cæterum, vt facilius quemuis numerum maiorem per minorem diuidamus, notentur hæc. Primo à ſiniſtra verſus dextram in operatione procedẽdum, adeoq; figuram vltimam diuiſoris ſub vltima diuidendi collocandam, ſiquidem vltima diuiſoris minor ſit vltima diuidendi, aut æqualis, ſi maior ſub penultima. Quod ſi vna, duæ, aut etiam plures diuidendi, & diuiſoris verſus ſiniſtram ſint æquales, & penultima, aut antepenultima &c Diuiſoris maior, erit nihilominus vltima diuiſoris ſub penultima diuidendi collocanda, vt hic apparet.

45678
458

Secundo, ſi diuiſor plures habuerit figuras per omnes quotum inuentum eſſe multiplicandum, & productum ex diuidendo ſubtrahendum.

Tertio, abſoluta vna operatione, diuiſorem per vnam figuram verſus dextram promouendam, & ſi nihil accipi poſſit, cyphram ad quotum ponendum (quoties enim promouetur diuiſor, aliquid ad quotum ponitur) rurſuſque diuiſorem promouendum.

Quarto, quantum pro quoto accipiendum ſit, vſu potius, & praxi, quam præceptis diſcitur; poteſt tamen aliquid ſubſidij mẽſa Pythagoræ pręſtare, ſi nimirũ prima diuiſoris figura in latere ſiniſtro, in cellulis dextrorſum figuræ reſpondentibus, numerus diuidendus ſupra primam diuiſoris figuram poſitus, aut ſi non inueniatur, proxime minor, quæratur; nam ſi ab illo numero vſque ad caput tabulæ aſcendatur, erit numerus in capite inuentus, numerus ad quotum ponendus, aut certè minor.

His obſeruatis, ſint primo 486 per 2 diuidenda. Pono 2 ſub 4, & video quoties 2 in 4 contineantur; continentur bis: 2 ergo poſt lunulam pono. Deinde promoto diuiſore 2 ſub 8, video quoties 2 in 8 contineantur; vel quæro 2 in latere ſiniſtro menſæ Pythagoræ, & dextrorſum vſque ad 8 pergo; & hinc vſq; ad caput tabulæ aſcendo, & offendo in capite 4, quæ ad quotum pono. Promoueo deinde rurſus diuiſorem 2 ſub 6, & video eum ter in 6 contineri: 3 ergo ad quotum pono, & eſt operatio abſoluta.

~~486~~
~~222~~ (243

Secundum exemplum. Sint 16297 per 4 diuidenda, hoc eſt, quatuor inter ſe diuidant 16297 aureos. Pono diuiſorem 4 ſub 6, non ſub 1, quod 4 plura ſint quam 1, & dico 4 in 16 continentur quater: vel quæro in latere ſiniſtro menſæ Pythagoræ 4, & dextrorſum vſq; ad 16 pergo, & hinc ad caput aſcendo, reperioq; 4: quibus poſt lunulam poſitis, deletiſque 1, 6, 4, promoueo diuiſorem 4 ſub 2, & video 4 in 2 non contineri, cum 4 excedant 2. Poſita ergo ad quotum cyphra, promotoq; diuiſore 4 ſub

~~1~~ 1
~~16297~~ (4074
~~4444~~

4 sub 9, Dico 4 in 29 continentur septies; seu quæro 4 in latere sinistro tabulæ, dextrorsumque vsque ad 28, numerum proximè minorem numero 29 pergo, & hinc ad caput ascendo, reperioque 7; quibus ad quotum positis, & 1, quo 29 excedunt 28 supra 9 collocato, promoueo diuisorem 4 sub 7, & video 4 in 17 quater contineri & restare 1. Igitur 4 ad quotum, & 1 supra 7 positis, erit diuisio absoluta. Hoc est, si 4 inter se 16297 aureos diuidant, capiet quilibet 4074, superest 1.

Tertium exemplum. Sint 980540 per 368 diuidenda. Collocatis numeris more consueto, vt in prima operatione vides, aduerte quoties 3 in 9 contineantur; cõtinentur quidem ter: sed 3 accipere non potes, quod ter sex faciant 18, quæ ex 8 supra 6 positis auferri non possunt; cum 18 excedant 8: accipe ergo tantum 2, quibus ad quotum positis, duc omnes diuisoris figuras in quotum 2, dicendo bis 3 sunt 6, quibus ex 9 subtractis; restant 3, quæ pone supra 9, deletis 9 & 3, & dic bis 6 faciunt 12, quibus ex 38 subtractis, restant 26, vt in secunda operatione cernis. Dic tertio bis 8 faciunt 16, quibus ex 260 subtractis, restãt 244, vt in tertia operatione cernis. Promoto iam diuisore hoc est, positis 3 sub 6. sex sub 8, octo sub 5, vt in tertia appáret operatione, vide quoties 3 in 24 contineantur; continentur quidẽ octies:

3 Operat. 1.
~~9~~80540(2
~~3~~68

2 Operat. 2.
~~3~~6
~~9~~~~8~~0560(2
~~3~~~~6~~8

24 Oper. 3.
~~3~~~~6~~4
~~9~~~~8~~~~0~~549(2
~~3~~~~6~~~~8~~8
36

6 Oper. 4.
~~2~~~~4~~
~~3~~~~6~~1
~~9~~~~3~~~~0~~540(26
~~3~~~~6~~~~8~~8
~~3~~6

 sed

ſed 8 propter ſequentes diuiſoris figuras 6 & 8, accipere non potes; imo ne 7 quidem, ſiquidem ſi 7 acciperes, reſtarent 4, ex quibus 42, quæ fiunt ex ductu 6 in 7, auferri non poſſunt. Accipe ergo tantum 6, & reſtant 6. Poſitis itaq; 6 poſt lunulam, & 6 reſiduis ſupra 4, vt in quarta operat. Dic ſexies 6 faciunt 36; quibus ex 64 ſubtractis, reſtant 28 vt in quinta operat. cernis. Dic quoque octies 6 faciunt 48, quibus ex 285 ſubtractis, reſtant 237, vt in ſexta operat. vides. Promoto iterum diuiſore, vt in ſexta operatione apparet, vide quoties 3 in 23. contineantur: continentur quidem ſepties; at propter ſequentes diuiſoris figuras 6 & 8, accipere 7 non potes: accipe ergo tantum 6, & reſtant 5, vt in ſeptima operat. cernis. Dic iam ſexies 6 faciunt 36; quibus ex 57 ſubtractis, reſtant 21, vt in octaua operat. vides. Dic quoque ſexies 8 faciuut 48, quibus ex 214 ſubtractis, reſtant 166, vt in nona operat. cernis.

Oper. 5.

2
6
248
364
980540 (26
3688
36

Oper. 6.

2
63
248
3647
980540 (26
36888
366
3

Oper. 7.

25
63
248
3647
980540 (266
36888
366
3

Oper. 8.

2
25
63
2481
3647
980540 (626
36888
366
3

Operatio 9.

```
 1
 2
 28
 635
2481
36476
980540  (266
368888
 3666
  33
```

Operatio 10.

```
 1
 2
 254
 636
2481
36476
980540
368888  (2664
 3666
  33
```

Operatio 11.

```
  11
  22
 254
 6368
24812
364768
980540  (2664
368888
 3666
  33
```

Promoto rursus diuisore, vt in nona apparet operatione. Vide quoties 3 in 16 contineantur; continentur quidē quinquies: verum 5 propter sequentes diuisoris figuras, accipere nequis: accipe ergo tantum 4, & restant 4. positis itaque 4 post lunulam, & 4 residuis supra 6, vt in decima operat. cernis, multiplica tam 6, quam 8 diuisores per 4, & producta subtrahe ex 460, vt hactenus docuimus, eritque tota diuisio absoluta, vt in vndecima operatione vides. Repetiui toties exemplum, non quod necesse sit; sed vt quilibet facile proprio Marte diuisionem, quæ aliquid difficultatis habere videtur, posit discere.

Quartum exemplum. Sint 1531100 per 305 diuidenda. Collocato exemplo, vt vides in prima operatione. Dic 3 in 15 continentur quinquies: positis ergo 5 post lunulam, deletisq; delendis, dic quinquies 5 faciunt 25 (nam cyphra non curatur) subtractis ergo 25 ex 31 restãt 6, vt in sec. oper. vides. Iam quia pro moto diuisore nihil est supra diuisorẽ 3: posita ergo ad quotum figura 0, promoue diuisorẽ denuo vt in 3. oper. cernis, & dic 3 in 6 continentur bis, restat nihil: positis ergo 2 ad quotũ dic bis 5 faciunt 10; quibus ex 10 subtractis, restat nihil.

Operatio 1.

1531100(5
305

Operatio. 2.

6
1531100(50
3055
30

3. Operat.

7 2 2 8

6
1531100(5020
30505
3

Et quia in diuidendo nihil superest; estq; diuisor semel adhuc promouendus, pone 0 ad quotũ, & erit diuisio perfecta.

Etiam hoc animaduertendum est, cum versus dextram diuisor habet cyphras, eas ad finẽ numeri diuidendi promouendas, & cũ reliquis diuisoris figuris dũtaxat operandũ, vt in hoc quinto exẽplo, in quo 850670 per 6400 diuidenda proponuntur, est videre.

1
3
228
850670(13
644 00
6

Exa-

Examen.

Abiice tam ex quoto, quam ex diuiſore 9, quoties potes, reſidua in ſuperiore, & in inferiore crucis parte poſita, duc in ſe; atque ex eo, quod inde fit, & reſiduo diuiſionis, ſi quod fuerit rurſus abiice 9, quoties potes: reſiduo huic ſi æquale fuerit reſiduum numeri diuidendi, probabile eſt operationem bonam eſſe. Si æquale non fuerit, certum eſt erratum eſſe. Exempli cauſa, reiectis ex quotis 9, quoties fieri poteſt, reſtant in primo exemplo, 0; in ſecundo 6; in tertio, 0; in quarto 7. quæ ponuntur in ſuprema parte crucis. Reiectis quoque 9 ex diuiſoribus, quoties fieri poteſt, reſtant in primo exemplo 2; in ſecundo 4; in tertio 8; in quarto 8, quæ ponuntur in inferiore parte crucis. Ductis iam reſiduis illis in ſe, producuntur in primo exemplo, 0; in ſecundo 24; in tertio, 0; in quarto 56. His ſi addantur reſidua diuiſionis, fient in exemplo ſecundo (nam in primo, & quarto nullum eſt reſiduum) 25: in tertio 8. Reiectis hinc rurſus 9, quoties fieri poteſt, reſtant, in primo exemplo, 0, in ſecundo 7, in tertio 8, in quarto 2; quæ ad alterum latus crucis ponuntur. Quod ſi reiectis 9, quoties fieri poteſt, ex numeris diuidendis, ſuperfuerint, in exemplo primo, 0; in ſecundo 7; in tertio 8; in quarto 2, probabile eſt operationes probas eſſe.

Certiſsima probatio eſt, quæ fit per Multiplicationem, hoc modo. Ducatur diuiſor in quotum, producto addatur reſiduum diuiſionis, ſi quod fuerit; nam ſi hoc vltimum productum, æquale fuerit numero diuidendo, recte ſe habet operatio. Eodem modo per diuiſionem multiplicatio examinatur. Si enim productum diuidatur per alterutrum multiplicantem, atque in quoto alter multiplicans prouenerit, rectè se habet operatio.

CAPVT II.

DE FRACTORVM NVmerorum elementis.

Numerus fractus est pars, vel partes alicuius integri, & scribitur hoc modo, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{81}{120}$; primus significat dimidium; secundus duas tertias partes alicuius integri, hoc est, inferior significat totum aliquod diuisum esse in tres partes; at superior ex tribus illis, duas duntaxat acceptas esse innuit. Tertius significat tres quartas partes. Quartus quinq; septimas. Quintus septem duodecimas. Sextus octoginta vnam centesimas vigesimas. Inferior dicitur Denominator, quod nominet, in quot partes totum sit diuisum: Superior Numerator, quod numeret partes acceptas ex partibus, in quas totum diuisum est. Exempli causa, si aureus esset diuisus in 60 partes, & ego ex illis accepissem 27, haberem $\frac{27}{60}$, nempe viginti septem sexagesimas, hoc est, 27 cruciferos. Sed iam ad præcepta pergimus.

ARTICVLVS I.

FRACTIONES AD MInores terminos reducere.

Reducere fractionem ad minores terminos, est efficere, vt tam numerator, quàm denominator minores quidem fiant, eandem tamen, quam prius, proportionem inter se conseruent: ita ex hac fractione $\frac{6}{12}$, potest & hæc fieri $\frac{3}{6}$, & hæc $\frac{1}{2}$, siquidem in omnibus tribus denominator est duplus numeratoris, omnesque dimidium significant.

Reducturus ergo magnam aliquam fractionem ad minores terminos, subtrahe tandiu minorem terminũ ex maiore, donec subtrahendus, & residuus, æquales fiant. Aut diuide tandiu maiorẽ per minorem, donec nihil remaneat; tunc enim vterque Denominator & Numerator diuidendus erit per residuũ illud, aut vltimum diuisorem. Sit hæc fractio $\frac{63}{91}$ ad minores terminos reducenda: subtrahe 63 ex 91, restant 28 Deinde subtrahe 28 ex 63, restant 35: rursus subtrahe 28 ex 35, supersunt 7. Item subtrahe 7 ex 28, restant 21; iterumque subtrahe 7 ex 21, restant 14; ac deniq; subtrahe 7 ex 14, supersunt 7, quæ est vtriusq; numeratoris & denominatoris mensura maxima, per quam si tam 63, quam 91, diuiseris, prouenient 9, & 13; erit igitur hæc fractio $\frac{63}{91}$, ad hanc $\frac{9}{13}$ reducta. Vel diuide 91 per 63, restant 28; deinde diuide 63 per 28, restant 7: deniq; diuide 28 per 7, restat nihil: erit igitur vltimus hic diuisor 7, numerus per quem tam 91, quam 63 diuidendus est. Quod si in hac mutua subtractione, nunquã subtrahendus residuo æqualis fiat: & in mutua illa diuisione, semper aliquid supersit, donec ad vnitatem perueniatur, nõ poterit illa fractio ad miõres terminos reduci, vt videre est in hac fractione $\frac{17}{24}$, quæ ad minores terminos reduci nequit. Dicitur numerus, per quem vterque, tam Numerator, quam Denominator diuiditur, cõmunis vtriusque mensura.

Nu-

Numeri verò, qui eiusmodi mensuram habent, dicuntur numeri inter se compositi; qui non habent, dicuntur inter se primi, vt videre licet in septimo Elementorum Euclidis.

Articvlvs II.

Dvas avt plvres fractiones, ad eandem denominationem reducere.

Reducere fractiones ad eandem denominationem, est efficere, vt eundem Denominatorem acquirant. Duas ergo fractiones ad eandem denominationem reducturus, multiplica inter se denominatores, vt habeatur communis denominator. Pro numeratoribus vero nouis, duc denominatores in numeratores per crucem. Exemplum. Sint hæ duæ fractiones $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6}$, ad eandem denominationem reducendæ. Duc denominatores in se, & fient 24, communis Denominator. Pro Numeratoribus duc per crucem, $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \mid \frac{18}{24} \cdot \frac{20}{24}$, pro primo 3 in 6; pro secundo 5 in 4, vt fiant 18 & 20, vt in exemplo apparet. Valent igitur idem tam $\frac{3}{4}$, $\frac{18}{24}$, quam $\frac{5}{6}$, $\frac{20}{24}$. Reducturus tres, quatuor, aut plures fractiones ad eandem denominationem, duc primæ Denominatorem in Denominatorem secundæ; productum in Denominatorem tertiæ; & hoc productum in Denominatorem quartæ &c. Et erit postremum productum, Denominator cõmunis. Pro Numeratoribus nouis, duc numeratores reducendos in denominatorẽ iam inuentum; productũ diuide per Denominatores reducẽdos & e-

& erũt quoti numeratores noui. Exemplũ. Sint hæ quatuor fractiones $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ ad eandem denominationem reducendæ. Duc Denominatores in ſe, hoc eſt, 2 in 3, & fient 6; hoc productum in 4, fientque 24, hoc in 5, & fient 120, communis Denominator. Pro primo nouo Numeratore duc 1 in 120, productum diuide per 2 & prouenient 60. Pro ſecundo, duc 2 in 120, productum diuide per 3, & inuenies 80. Pro tertio, duc 3 in 120, productum diuide per 4 & prodibunt 90. Pro quarto duc 4 in 120, productum diuide per 5 & reperies 96, vt in his exemplis apparet $\frac{60}{120}, \frac{80}{120}, \frac{90}{120}, \frac{96}{120}$.

Sed obſeruandum, denominatorem communem fieri poſſe minorem; ſi productũ præcedentium denominatorum, & denominator ſequentis fractionis, habeant communem menſuram. Vt in his $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$, habent productum duorũ priorum denominatorum, quod eſt 6, & denominator ſequentis fractionis, qui eſt 4, hanc menſuram 2; per quam ſi tam 6, quam 4, diuiſeris, prouenient 3 & 2. Si rurſus, aut 6 in quotũ 2 aut 4 in quotum 3 duxeris, producetur trium priorum fractionum communis denominator 12. Hic in denominatorem quartæ ductus, producit communem omnium Denominatorem 60. Si iam porrò per regulam traditam operatus fueris, inuenies has fractiones $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ ad has $\frac{30}{60}, \frac{40}{60}, \frac{45}{60}, \frac{48}{60}$ reductas.

Item ſi hæ fractiones $\frac{3}{4}, \frac{11}{12}, \frac{17}{18}$ ad eandem denominationem ſint reducendæ, ita agito. Denominatores primæ & ſecundæ fractionis, nempe 4 & 12, habent communem menſuram 4: ſi ergo tam 4, quam 12, per

4 di-

4 diuisoris, prouenient 1 & 3. Rursus siue 12 in 1, siue 4 in 3 duxeris, reperies 12. Iam quia 12, denominator primæ & secundæ fractionis, & 18 denominator tertiæ, habent communem mensuram 6, si per eam tam 12, quam 18 diuidas, prouenient 2 & 3; quare si vel 18 in 2, vel 12 in 3 duxeris, prouenient 36, denominator communis $\frac{27}{36}$, $\frac{33}{36}$, $\frac{34}{36}$. Numeratores nouos facilè, per supra dicta, inuenies.

ARTICVLVS III.

DE ADDITIONE ET *subtractione fractorum.*

Nihil est facilius, quam duas, aut plures fractiones inuicem addere, aut minorem ex maiore subducere. Nam si duæ, aut plures, eundem habeant denominatorem, adduntur inuicem Numeratores, & supponitur illis communis denominator. Vt si hæ fractiones $\frac{3}{7}$ $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$ eundem habentes denominatorem, addendæ sint, adduntur 3, 5, 6, & conflantur 14, quibus supponitur cõmuuis denominator 7, hoc modo $\frac{14}{7}$. Si iam 14 per 7 diuiseris, prouenient 2, summa dictarum fractionum.

Si habeant diuersos denominatores, reducuntur prius ad eandem denominationem; ac deinde, vt prius, numeratores inuicem adduntur. Sint hæ fractiones $\frac{3}{4}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{17}{18}$ addendæ; reductæ faciunt has $\frac{27}{36}$, $\frac{33}{36}$, $\frac{34}{36}$ summa numeratorum est 94, qua per 36 diuisa, proueniũt $2\frac{22}{36}$, siue $2\frac{11}{18}$, in minimis terminis.

Hæ verò $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ad eandem denominationem reductæ, faciunt $\frac{20}{60}$, $\frac{15}{60}$, $\frac{12}{60}$; summa numeratorum

est

est 47; ergo summa omnium $\frac{47}{60}$. Eodem modo, si fractio minor ex maiore sit subtrahenda, agendum est. Et si quidem eundem habeant denominatorem, subtrahatur minor numerator ex maiore, residuo supponatur communis denominator. Vt si hæc fractio $\frac{2}{7}$ ex hac $\frac{5}{7}$, sit subtrahenda, subtrahantur 2 ex 5, restant 3, quibus si supponantur 7, fiet residua hæc fractio $\frac{3}{7}$.

Si non habeant eundem denominatorem, reducantur ad eundē; deinde subtrahatur minor numerator ex maiore, residuo supponatur communis denominator. Vt si hæc $\frac{5}{12}$ ex hac $\frac{17}{18}$, sit subtrahenda, reductæ ad eandem denominationem, faciunt $\frac{90}{216}$, $\frac{204}{216}$, in minimis terminis $\frac{15}{36}$, $\frac{34}{36}$; & 15 subtracta ex 34, relinquunt 19, quibus si supponatur communis denominator 36, fiet reliqua hæc fractio $\frac{19}{36}$.

Contingit interdum, vt maior fractio ex minore sit subtrahenda, quando nimirum fractis integra adhæret. Exempli causa, sint $12\frac{5}{6}$ ex $24\frac{2}{7}$ subtrahenda, quia fractio hæc $\frac{5}{6}$ maior est, quam hæc $\frac{2}{7}$; siquidem 7 in 5 ducta plus faciunt, quam 6 in 2 (semper autem illa fractio maior est, cuius numerator in alterius denominatorem ductus, plus facit, quam alterius Numerator ductus in denominatorem ipsius) si inquam $12\frac{5}{6}$ ex $24\frac{2}{7}$ subtrahenda proponantur, frangatur vnum integrum, hoc est, addantur ad Numeratorem fractionis $\frac{2}{7}$ septem, & tollatur vnum ex integris, hoc modo $23\frac{9}{7}$. Iam si subtrahantur 12 ex 23; & $\frac{5}{6}$ ex $\frac{9}{7}$, restabunt $11\frac{19}{42}$: Nam $\frac{5}{6}$, $\frac{9}{7}$ ad eandem denominationem reductæ, faciunt $\frac{35}{42}$, $\frac{54}{42}$, & 35 ex 54 subtracta, relinquunt $\frac{19}{42}$: ergo si $12\frac{5}{6}$ ex $24\frac{2}{7}$ subtrahantur, restant $11\frac{19}{42}$.

Articulus IIII.

De Multiplicatione, & diuisione fractorum.

Multiplicatio, & diuisio fractorum faciles sunt: nam si in Multiplicatione, tam Numeratores, quam denominatores in se multiplicētur, perfecta erit multiplicatio. Sit hæc fractio $\frac{7}{12}$ in hanc $\frac{5}{8}$ multiplicanda; duco tam superiores 7, 5, quā inferiores 12, 8 in se, & produco $\frac{35}{96}$.

Si vna per alteram sit diuidenda, inuertendus est diuisor, & postea vt in multiplicatione operandum. Sit hæc $\frac{11}{12}$ per hanc $\frac{4}{7}$ diuidenda. Inuerto diuisorem sic $\frac{7}{4}$; quo facto, duco tam 11 in 7, quam 12 in 4, & produco hanc fractionem $\frac{77}{48}$; siue (facta diuisione) hanc $1\frac{29}{48}$, semper enim, quando superior maior est inferiore, diuisio fieri potest, licet non semper sit necesse; imo interdum commodius est, si non fiat.

Quod si, vt sæpe contingit, fractis adhæreant integra, frangenda prius sunt integra, hoc est, multiplicanda per denominatorem, & productum Numeratori addendū. Sint hæc $12\frac{5}{7}$ per $\frac{4}{9}$ multiplicāda: duco 12 in 7, & produco 84 quæ addo Numeratori, & cōflo $\frac{89}{7}$. ductis iam tam 89 in 4, quā 7 in 9, produco $\frac{356}{63}$, &, facta diuisione, $5\frac{41}{63}$. Igitur si multiplicentur $12\frac{5}{7}$ per $\frac{4}{9}$, producūtur $5\frac{41}{63}$.

Si sint $12\frac{5}{7}$ per $\frac{4}{9}$ diuidenda, inuerto diuisorem sic $\frac{9}{4}$, & diuidendum, vt prius, resoluo, stabuntque sic numeri $\frac{89}{7}$. $\frac{9}{4}$; ductis igitur tam superioribus, quam inferioribus in se, producuntur $\frac{801}{28}$, siue, facta diuisione, $28\frac{17}{28}$: si ergo $12\frac{5}{7}$ per $\frac{4}{9}$ diuidantur, proueniunt $28\frac{17}{28}$. Cur autem cū integer per fractū multiplicatur, minus integro; cum

cum verò integer per fractum diuiditur plus integro proueniat, dicetur. lib. 1. cap. 4. art. 6. Annot. 2.

Si vtriq; fractioni adhæreant integra, vtriusq; integra resoluta, numeratoribus addi debent, ac deinde iuxta traditã regulam agendum. Sint enim $7\frac{2}{3}$ per $3\frac{3}{4}$ multiplicanda; resoluta sic habent $\frac{23}{3}$, $\frac{15}{4}$; ductis tam superioribus, quã inferioribus in se, sic $\frac{345}{12}$; & facta diuisione sic $28\frac{9}{12}$; siue sic $28\frac{3}{4}$.

Si verò $7\frac{2}{3}$ sint per $3\frac{3}{4}$ diuidenda, inuerto diuisorem, stabitq; sic exemplum $\frac{23}{3}$, $\frac{4}{15}$, & facta multiplicatione sic $\frac{92}{45}$, & diuisione sic $2\frac{2}{45}$.

Deniq; si integer per fractum sit multiplicandus, suppono integro vnitatem. Vt si velim 12 per $\frac{3}{5}$ multiplicare, stabit sic exemplum $\frac{12}{1}$, $\frac{3}{5}$; facta multiplicatione sic $\frac{36}{5}$; & diuisione sic $7\frac{1}{5}$.

Eodem modo, si velim 12 per $\frac{3}{5}$ diuidere, suppono integro vnitatẽ, & inuerto diuisorem hoc modo $\frac{5}{3}$, $\frac{12}{1}$; facta igitur multiplicatione producuntur $\frac{60}{3}$, & diuisione, 20. Ergo si 12 per $\frac{3}{5}$ diuidantur, proueniunt 20.

ARTICVLVS V.

DE FRACTIONIBVS fractorum numerorum.

Occurrunt interdum fractorum fractiones, quod quando fit, duc tam superiores, quam inferiores in se, & habebis illorum valorẽ. Vt si sit huius fractionis $\frac{5}{7}$, hæc fractio $\frac{3}{5}$ reduces eas ad hanc $\frac{15}{35}$, siue ad hanc $\frac{3}{7}$. Si huius $\frac{21}{60}$, hæc $\frac{3}{7}$, reduces eas ad hanc $\frac{63}{420}$, siue ad $\frac{9}{60}$, siue ad $\frac{3}{20}$ nam si $\frac{21}{60}$ ponãtur viginti vna sexagesimę vnius floreni, erunt $\frac{21}{60}$ viginti vnus cruciferi; ac proinde tres septimæ viginti vnius cruciferorum, erunt 9 cruciferi, siue tres triarij.

Caput III.

De Regulis, et earum vsu.

Multi multas tradunt regulas, suo quilibet instituto accommodatas. Ego quatuor, saluo aliorum iudicio, sufficere iudico. Auream nimirum illam proportionum regulam: Regulas item Consortij, Alligationis, & positionum.

Articulus I.

De Regula Proportionum.

Vt hæc regula melius intelligatur, aliquid de proportionibus dicendum est. Scire ergo oportet, tunc quatuor numeros apud Arithmeticos dici proportionales, si primo, & tertio in quemcumq; numerum multiplicato; Item secundo, & quarto, in eundem, aut alium quemcumque, semper quando productum primi maius est producto secundi, etiam productum tertij maius sit producto quarti. Et si productum primi sit æquale producto secundi, etiam productum tertij æquale sit producto quarti. Ac denique si productum primi minus sit producto secũdi, etiam productũ tertij minus sit producto quarti. Si inquam hoc semper contingat, tunc quatuor illi numeri dicuntur esse proportionales: si verò non semper contingat, proportionales non dicuncuntur. Item per 16. sexti, & 19 sept. tunc demonstrantur quatuor numeri esse proportionales, quando genitus ex primo, & quarto, æqualis est genito ex secundo, & tertio. Vnde constat in Multiplicatione productum, duos multiplicantes, & vnitatem, esse proportionales: si nimirum productum, & vnitas extremas, multiplicantes medias sedes occupent. Eodem modo in diuisione proportionales erunt. Numerus diuidendus, Diuisor, quotus, & vnitas; si diuidendus, & vnitas extremas, Diuisor, & quotus medias sedes occupent. Sed cum de proportione plura dicenda sint cap. 4. regulam ipsam aggredimur.

Regula proportionum, etsi vnica est; quadrimembris tamen, facilitatis gratia, esto. Directa simplex, Reciproca simplex, Directa composita, Reciproca composita. Dicitur hæc regula, etiam regula trium, quod ex tribus numeris notis, quartus ignotus per illam eruatur. Dicitur quoque, propter præstantiam, qua reliquas superat, regula aurea.

DE REGVLA PROPORtionum directa simplici.

In hac regula semper sunt tres numeri cogniti, quorum duo homogenei inter se sunt, tertius homogeneus numero inueniendo. In collocatione primo loco ponitur ille homogeneus, qui quæstionem annexam non habet, seu cuius valor iam cognitus est. Reliqui duo noti, ponuntur secundo & tertio loco, secundo quidem homogeneus inueniendo, tertio homogeneus primo loco ponendo. Quod etsi in directa opus non est, in reciproca tamen necessarium prorsus est. Facta collocatione ducitur secundus in tertium; productum diuiditur per primum, & prouenit quæsitum.

ANNOTATIO.

Vtimur in exemplis moneta in Romano imperio vsitatiore, nimirum aureis, triarijs, cruciferis, & obolis. Aureus habet 20 triarios, 60 cruciferos, 420 obolos. Triarius habet 3 cruciferos, 21 obolos. Crucifer habet 7 obolos.

EXEMPLA.

Exemplum primum. 20 aureis emo 16 vlnas panni, quot vlnas emo 45 aureis? Hic vides homogeneos esse 20, & 45 aureos, & quæstionem annexam habere 45 aureos. Primo ergo loco pono 20. au. secundo, 16 vlnas. Tertio 45 aureos, hoc modo. 20 au. | 16 vl. | 45 au. Facta operatione iuxta regulam, reperio 36 vlnas. Nam 16 in 45 ducta gignũt 720, quę per 20 diuisa, reddũt 36.

Secundum exemplum. Quidam dat pro mensa vno die 9 cruciferos, quæro quid vno anno dare debeat? Sciendum hic est, vnum annum habere dies 365. stabit ergo sic exemplum 1 D. | 9 cruc. | 365 D. Facta operatione reperies cruciferos 3285, quibus diuisis per 60 (quod vnus aureus 60 cruciferos habere ponatur) reperies aureos 54, cruciferos 45. Atque tantum vno anno dare debet.

Tertium exemplum. Vna libra carnis venditur 3 cruciferis, 4 obolis, quanti venduntur 100 libræ? Resolue cruciferos in obolos, hoc est, duc in 7; producto adde 4, fientque 25 oboli. Quo facto sic habet exemplum. 1 lib. | 25 ob. | 100 lib. Operatione facta reperies 2500 obolos, quibus per 420 diuisis (quod vnus aureus

reus 420 obolos habere ponatur) proueniunt aurei 5, restant 400 oboli. Quibus per 7 diuisis, proueniunt 57 cruciferi, restat vnus obolus. Ergo si 1. libra carnis vendatur 3 cruciferis, 4 obolis, vendentur 100 libræ, aureis 5, cruferis 57, obolo vno.

Quartum. 10 aureis, 25 cruciferis, emo 2 vrnas & 32 mensuras vini: quanti emo 20 vrnas? Quia in hac quæstione homogeneæ res sunt vrnæ, & mensuræ, & quæstionem annexam habent 20 vrnæ, debent primo loco poni 2 vrnæ, & 32 mensuræ, adeoque quæstio in hunc modum formanda. Vrnæ 2, & 32 mensuræ dant 10 aureos, 25 cruciferos; quid dant 20 vrnæ? Resolue vrnas in mensuras, aureos in cruciferos (habet vna vrna mensuras 64, vnus aureus 60 cruciferos) & stabit sic exemplum. 160 Mens. | 625 cruc. | 1280 Mens. | Facta operatione reperies 5000 cruciferos, quibus per 60 diuisis, proueniunt 83 aurei, restant 20 cruciferi. Ergo si 2 vrnæ, 32 mensuræ emuntur 10 aureis, 25 cruciferis, ementur 20 vrnæ, 83 aureis, 20 cruciferis.

Quintum. Quidam emit 2 au. $18\frac{3}{4}$ crucif. $1\frac{1}{2}$ vlnas panni, quot emet vlnas, 89 au. 40 cruciferis? Duo aurei habent 120 cruciferos, quibus si addas $18\frac{3}{4}$, cruciferos habebis $138\frac{3}{4}$. aurei 98 habent 5880 crucif. quibus si addas 40 crucif. conflabis 5920. Exemplum ergo, facta resolutione fractorum, integro vnitate supposita, & termino primo, qui diuisor est, inuerso, sic stat $\frac{4}{555} \mid \frac{3}{2} \mid \frac{5920}{1}$. Ductis 4 in 3 produco 12; his in 5920 progigno 71040, qui est numerus diuidendus. At ducto 1 in 2 creo 2, his in 555 efficio 1110, qui est diuisor, Diuisis ergo 71040 per 1110, proueniunt 64 vlnæ.

Sextum. Quidam mercator emit Monachij 400 medimnos salis, quemlibet vno aureo, 54 cruciferis. Hos Noribergam vexit; atque Monachio Ingolstadium vsque pro vectura, & vectigalibus expendit pro quolibet medimno 5 cruciferos: Ingolstadij vendidit 180 medimnos, quemlibet 2 aureis, reliquos 220 Noribergam vexit, deditque pro vectura, & vectigalibus pro quolibet medimno 4 cruciferos; quærit si 30 aureos lucrari velit, quanti quemlibet medimnum Noribergæ vendere debeat? Dico primo vnus medimus dat 1. au. 54. crucif. siue 114 cruciferos; quid dant 400 medimni? Et reperio cruciferos 45600. Quia verò pro quolibet medimno expendit 5 cruciferos, si duxero 5 in 400, reperio crucif. 2000. Iterum, quia Ingolstadio Noribergam pro quolibet 220 medimnorum expendit 4 cruciferos, duco 220 in 4, & produco 880 cruciferos. Summa omnium est aureorum 808. Porrò quia 180 medimnos vendidit 360 au. quemlibet medimnum 2 aureis, si 360 aureos ex 808 subtraxero, relinquentur 448 aurei: sed quia 30 aureos vult lucrari, addo illis 30, vt fiant 478. Atque hos aureos diuido per 220 medimnos Noribergam vectos, inuenióque quemlibet 2 aureis, $10\frac{4}{11}$, cruciferis vendendũ esse. Nam si diuidantur 478 per 220, proueniunt 2 au. restant 38; quibus in 60 ductis, productoque per 220 diuiso, proueniunt $10\frac{4}{11}$ cruciferi.

Septimum. Mercator emit 8 vlnas panni 10 au. vult 10 vlnas vendere 15 aureis, quærit quot vlnæ sibi emendæ sint, vt lucretur 100 aureos? Dico primo. 8 vlnæ dant 10 au. quid dant 10 vlnæ? & reperio $12\frac{1}{2}$ au. Ergo si 8 vlnas emit 10 aureis, emet 10 vlnas $12\frac{1}{2}$ aureis.

aureis. Verum cum 10 vlnas vendere velit 15. aureis, lucratur 10 vlnis $2\frac{1}{2}$ aureos, (subtracti enim $12\frac{1}{2}$ ex 15 relinquunt $2\frac{1}{2}$) Dico iterum. $2\frac{1}{2}$ aurei, dant 10 vlnas, quot dant 100 aurei? & reperio 400 vlnas: atque tot vlnas emere debet, vt 100 aureos lucretur.

Octauum. Est cisterna duas habens eiusdem magnitudinis fistulas, per quarum superiorem impletur 6, per inferiorem euacuatur 8 horis. Quæro si vtraq; continuo fluat, quanto tempore cisterna impleatur? Quia 6 horis tota impletur, implebitur vna hora $\frac{1}{6}$ cisternæ. Et quia 8 horis tota euacuatur, euacuabitur vna hora $\frac{1}{8}$ cisternæ. Si ergo subtraham $\frac{1}{8}$ ex $\frac{1}{6}$, restabit pars cisternæ, quæ vna hora impletur, nimirum $\frac{1}{24}$. Quare si vna hora impletur $\frac{1}{24}$ cisternæ, implebitur tota horis 24.

Nonum. Est cisterna tres habens fistulas æqualiter, & continuò fluentes, per primam impletur 4, per secundam 6, per tertiam 12 horis. Quæro si omnes simul fluerent, quanto tempore cisterna impleretur? Prima vna hora implet $\frac{1}{4}$. Secunda $\frac{1}{6}$. Tertia $\frac{1}{12}$ cisternæ: ergo omnes simul vna hora implent $\frac{1}{2}$ cisternæ. Si dicam. $\frac{1}{2}$ cisternæ dat vnam horam, quid dat vna cisterna? reperio 2 horas. Atque tanto tempore, si omnes fistulæ fluerent, cisterna impleretur.

Decimum. Petrus dat Paulo 25 vlnas panni nigri pro 45 vlnis panni rubri, cuius quælibet vlna constat 35 cruciferis, quæro quid valeat vna vlna panni nigri Petri? Quia vna vlna panni rubri constat 35 cruciferis, constabunt omnes simul 1575 crucif. Sed & tantum valent omnes panni nigri: ergo vna valebit cruciferis 63.

Vndecimum. Tres opifices abſoluunt aliquod opus. Primus ſolus laborans abſoluit illud 20; alter 30; ſi tertius accederet, abſoluerent id omnes ſimul 10 diebus. Quæro quanto tempore tertius ſolus abſolueret? Primus vno die abſoluit $\frac{1}{20}$; ſecundus $\frac{1}{30}$; vterq; ſimul $\frac{1}{12}$ totius operis: qua ſubtracta ex $\frac{1}{10}$ portione, quam omnes ſimul vno die abſoluunt, reſtat $\frac{1}{60}$, portio tertij. Ergo ſi tertius vno die abſoluit $\frac{1}{60}$ operis, abſoluet totum 60 diebus. Nam ſi dicam, primus 20 diebus abſoluit totum opus, quid vno die? Reperio $\frac{1}{20}$. Eodem modo ſecundum vno die reperio abſoluere $\frac{1}{30}$. Vterque ergo vno die abſoluit $\frac{1}{12}$ operis. Et cum omnes id abſoluant 10 diebus, abſoluent vno die $\frac{1}{10}$. Subtracta ergo $\frac{1}{12}$ ex $\frac{1}{10}$, reſtat $\frac{1}{60}$, id quod tertius vno die abſoluit. Si ergo tertius vno die abſoluit $\frac{1}{60}$ operis, abſoluet totum 60 diebus.

Aliter. Quoniam primus abſoluit opus 20 diebus, abſoluet 10 diebus dimidium operis, hoc eſt, $\frac{1}{2}$. Alter, quia 30 diebus totum abſoluit, abſoluet 10 diebus $\frac{1}{3}$ operis: vterque ergo 10 diebus abſoluet $\frac{5}{6}$ operis: Ergo tertius 10 diebus abſoluet $\frac{1}{6}$ operis. Ideoque totum 60 diebus.

Duodecimum. Duo tabellarij è diuerſis ciuitatibus 240 milliaribus diſtantibus eodem die exeunt. Primus quolibet die conficit 7? Alter 5 milliaria: quæro quoto die conuenturi ſint? Vterque ſimul conficiunt 12 milliaria. Si ergo dicam 12 milliaria dant 1 diem, quid dant 240 milliaria? Reperio 20 dies: conuenient ergo die vigeſimo.

Decimum tertium. Eſt moletrina tres habens molas. Prima 12 horis molit 10 modios, altera 10 horis

ris 8, tertia 6 horis, itidem 8 modios: quæro quot horis omnes molæ 30 modios molere possint? Prima vna hora molit $\frac{5}{6}$; altera $\frac{4}{5}$: tertia $\frac{4}{3}$: ergo omnes $\frac{267}{90}$. Iam dico $\frac{267}{90}$ modij requirunt 1 H, quid requirunt 30 modij? & inuenio $10\frac{10}{98}$ horas.

Decimum quartum. Est turris, cuius $\frac{1}{4}$ sub terra latet, $\frac{1}{3}$ aquis immersa est, supra aquam eminent pedes 150. Quæro quot pedum sit turris, quot item terra, & aqua occultentur? $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{3}$ faciunt $\frac{7}{12}$: ergo $\frac{7}{12}$ in terra & aqua sunt, $\frac{5}{12}$ supra aquam eminent. Si igitur (abiectis denominatoribus) dicam. 5 | 150 | 7, reperio 210, qui cum 150 faciunt 360 pedes, cuius $\frac{1}{4}$ sunt 90: $\frac{1}{3}$ sunt 120: ergo 90 pedes in terra sunt, 120 aquis immerguntur, & tota turris est 360 pedum.

Decimum quintum. Quidam mercator emit 100 vlnas panni 80 aureis, vult autem 230 vlnis lucrari 40 aureos. Quæro quanti vnam vlnam vendere debeat? Dico. 100 vl. | 80 au. | 230 vl. & reperio 184 au. Addo 40 au. vt fiant 224 aurei, dicoque 230 vl. | 224 au. | 1 vl. & inuenio vnam vlnam vendendam esse $58\frac{10}{23}$ cruciferis. Resolui enim 224 aureos in cruciferos, & reperi 13440, quibus per 23. diuisis, prouenerunt $28\frac{10}{23}$ cruciferi.

Decimum sextum. Quidam vult mutuos accipere 10 aureos, ea lege, vt sibi æquali numero dentur triarij, cruciferi & oboli. Quæro quot accipere debeat? Decẽ aurei faciunt triarios 200, cruciferos 600, obolos 4200: ergo vnus triarius est $\frac{1}{200}$, vnus crucifer $\frac{1}{600}$, vnus obolus $\frac{1}{4200}$ decẽ aureorũ: omnes ergo sunt

$\frac{29}{4200}$

$\frac{29}{4200}$ decem aureorum. Si igitur 4200 per 29 diuidantur, prouenient $144\frac{24}{29}$; atque tot triarios; tot cruciferos, & tot obolos accipere debet. Faciunt enim $144\frac{24}{29}$ cruciferi, $48\frac{8}{29}$ triarios; & $144\frac{24}{29}$ oboli faciunt $6\frac{26}{29}$ triarios: sed $144\frac{24}{29}$, $48\frac{8}{29}$, & $6\frac{26}{29}$ faciunt 200 triarios, hoc est, 10 aureos.

De Regula Reciproca simplici.

Regula reciproca simplex est, quando termini homogenei seu primus, & tertius permutantur: quando autem permutandi sint, ex ipsa quæstione iudicandum est. Permutatione facta operatio fit, vt in simplici directa.

Primum exemplum. Cum modius tritici venditur 3 aureis, fit panis pistorius 12 vnciarum: quæro quot vnciarum esse debeat, si modius vendatur 4 aureis? Siquidem stat exemplum. 3 au. | 12 vnc. | 4 au. Sed permutatis terminis homogeneis notis sic. 4 au. | 12 unc. | 3 au. Facta operatione proueniunt vnciæ 9. Quod autem termini sint permutandi, ratio hæc est. Quia si non permutarentur, prouenirent 16 vnciæ, quod fieri non potest: siquidem certum est, quo carius frumentum venditur, hoc minorem fieri debere panem. Ergo si panis, cum modius frumenti venditur 3 aureis, sit vnciarum 12, debet necessario, cum venditur 4 aureis, pauciorum esse vnciarum: quod vt fiat regula Reciproca vtendum est. Vnde fit, vt in collocatione permutetur termini homogenei, hoc modo. 4 au. | 12 vnc. | 3 au. vt proueniant 9 vnciæ.

Secun-

Secundum exemplum. Opifices 12 absoluunt opus aliquod 20 diebus; quot diebus opus habent 30 opifices? Exemplũ reciprocè sic habet. 30 op. | 20 D. | 12 op. operatione absoluta reperiuntur dies 8. Quod autem termini sint permutandi inde constat; quia 30 opifices citius se expediunt quam 20.

Tertium. Sex fistulæ cisternam implent 18 horis, quot horis opus habent 4 fistulæ? Certum est quod pluribus, plures enim fistulæ citius cisternam implent, quam pauciores. Idcirco reciprocè sic stat exemplum 4 fist. | 18 H. | 6 fist. facta operatione, reperio 27 horas.

Quartum. Nuncius si quotidie 12 milliaria conficiat, peruenit Romam 11 diebus: quæro quot diebus eò peruenturus sit, si quotidie conficiat milliaria 9? Certum est, quod quo pauciora milliaria conficit, hoc tardius Romam peruenturus sit. Igitur exemplum reciprocè sic habet. 9 Mil. | 11 D. | 12 Mil. operatione absoluta reperio dies $14\frac{2}{3}$.

Quintum. Quando pannus latus est 9 palmos, opus habeo pro tunica $4\frac{1}{2}$ vlnis: quæro quando latus est 12 palmos, quot opus habeam vlnis? Certum est, quod paucioribus. Vt ergo pauciores inneniam, reciprocè pono exemplũ. 12 pal. | $4\frac{1}{2}$ vl. | 9 pal. facta operatione, inuenio $3\frac{3}{8}$ vlnas.

DE REGVLA COMPOSITA DIRECTA.

Directa composita plures quam tres terminos notos exigit, nimirum 5, 7, aut etiam plures. Reducuntur autem

autem plures illi termini ad tres, si aut cognati termini in se sigillatim ducantur, aut regula proportionum instituatur. Sed rem exempla declarabunt.

Primum. 12 mercatores 1000 aureis lucrantur 800 aureos quæro quantum 18 lucrentur 1900? Hic noti numeri quinque ad tres reducendi sunt, hoc est, cognati primus, & secundus; Item quartus, & quintus in se ducendi, obtinebuntq; producta locum primum, & tertiũ, hoc modo 12000 | 800 | 34200, facta operatione reperies aureos 2280, quos 18 mercatores; 1900 aureis lucrãtur. Possumus & eosdẽ quinq; terminos ad tres per regulam proportionum reducere, si dicamus. 12 Merc. | 800 au. | 18 Merc. reperimus enim 1200: aut si dicamus 1000 | 800 | 1900, reperimus enim. 1520. Vt quæstio in his tribus terminis. 1000 | 1200 | 1900; aut in his. 12 | 1520 | 18, consistat. Siquidem vtrobiquẽ per operationem eruitur hic numerus 2280.

Secundum. 20 plaustra vini aduecta per 18 milliaria, consumunt 100 aureos, quantum consumunt 48 plaustra, aduecta per 30 milliaria? Duc tam 20 in 18; quam 48 in 30, & stabit exemplum in his terminis 360 | 100 | 1440. Facta operatione prouenient 400 aurei, quot 48 plaustra, per 30 milliaria aduecta, consumunt.

Tertium. 6 Mercatores, 200 aureis, 8 mensibus lucrantur 80 aureos; quantum lucrantur 16 mercatores, 600 aureis, 20 mensibus? Duc tam pecunias, quam menses in suos mercatores sigillatim, hoc est, duc in se tam 6. 200. 8; quam 16. 600. 20, stabitq; exemplum in his terminis 9600 | 80 | 192000: facta operatione reperies 1600 aureos, quos 16 mercatores 600 aureis, 20 mensibus lucrantur.

Quar-

Quartum. $7\frac{1}{4}$ aurei, $3\frac{1}{2}$ diebus, lucrantur $19\frac{1}{2}$ aureos, quid lucrantur $23\frac{3}{4}$ aurei, $9\frac{1}{2}$ diebus? Ductis tam $7\frac{1}{4}$ in $3\frac{1}{2}$; quam $23\frac{3}{4}$ in $9\frac{1}{2}$, proueniunt $\frac{203}{8}$, & $\frac{1805}{8}$, resolutoque hoc numero $19\frac{1}{2}$, & diuisore, qui est primus terminus, inuerso, stabit sic exemplũ $\frac{8}{203}$ | $\frac{39}{2}$ | $\frac{1805}{8}$: ductis igitur tam denominatoribus, quam numeratoribus in se, producuntur $\frac{563160}{3248}$, & facta diuisione, aurei 172, restant 1256, quibus in 60 ductis (quod vnus aureus 60 cruciferos habeat) productoq; per 3248 diuiso, proueniunt 23 cruciferi, restant 656, quibus rursus in 7 ductis (quod vnus crucifer 7 habeat obolos) & producto per 3248 diuiso proueniunt $1\frac{12}{29}$ oboli.

DE RECIPROCA Composita.

Reciproca composita pluribus etiam quam tribus terminis notis constat; qui autem termini transponendi sint, tum ex dictis de Reciproca simplici constat, tum exempla docebunt.

Primum exemplum. Quatuor Sartores conficiunt 100 tunicas 24 diebus, quot diebus opus habent 12 sartores pro 350 tunicis? Sic quidem habet exemplũ. 4 Sart. | 100 tu. | 24 D. | 12 Sart. | 350 tu. Sed quia 12 Sartores citius se expediunt, quam 4, permutandi sunt sartores, hoc modo 12 Sart. | 100 | 24 D. | 4 sart. | 350 tu. Ductis ergo tam 12 in 100; quam 4 in 350, producũtur 1200, & 1400, stabitq; exemplum in tribus terminis hoc modo, 1200 | 24 D. | 1400, operatione absoluta proueniunt dies 28.

Secun-

Secundum. Si 12 modij frumenti emantur 36 aureis, fit panis pistorius 8 vnciarum; quæro si 14 modij emantur 48 aureis, quot vnciarum panis esse debeat? Sic quidem stat exemplum. 12 Mod. | 36 au. | 8 vnc. | 14 Mod. | 48 au. Verum cum ductis 14 in 48, plus producatur, quam ductis 12 in 36, fit vt aurei sint permutãdi hoc modo, 12 Mod. | 48 au. | 8 vnc. | 14 Mod. | 36 au. Quo facto ductis tam 14 in 36; quam 12 in 48, producuntur 504, & 576. stabitque exemplum ad tres terminos reductum, hoc modo, 576 | 8 | 504; facta operatione proueniunt 7 vnciæ. Eadem quæstio sic solui potest. Dico primo. 36 aurei dant 12 modios; quot dant 48 aurei? Et invenio 16 modios. Rursus dico. 16 modij dant 8 vncias; quot dant 14? & reperio 7, vt prius.

Tertium exemplum. Quatuor equi vehunt plaustrum vini 250 vrnarum per 20 milliaria 8 diebus: quæro quot diebus 6 equi vehant plaustrum 350 vrnarum per 25 milliaria. Sic quidem stat exemplum 4 eq. | 250 vr. | 20 mill. | 8 D. | 6 eq. | 350 ur. | 25 mill. | sed quia 6 equi citius se expediunt, quam 4, stabit euersè hoc modo 6 eq. | 250 vr. | 20 mill. | 8 D. | 4 eq. | 350 vr. | 25 mill. | ductis iam tam 6.250, 20; quam 4. 350.25 in se sigillatim, producantur 30000, & 35000. Quare exemplum in tribus terminis sic habet, 30000 | 8 | 35000, facta operatione reperies dies $9\frac{1}{3}$, siue 9 dies, 8 horas.

ARTICVLVS II.

De regula consortij.

Fit

Fit interdum, vt plures mercatores societatem ineant, & vt aut de lucro, quod consequuntur, inter ipsos diuidendo; aut, si de lucro conuentum sit, quid quilibet in sortem conferre debeat; aut denique, si de vtroque horum constet, de tempore tamen, quo pecuniam expendendam in sorte esse necesse sit, quæstio oriatur. Colligantur primo pecuniæ singulorum in sortem datæ, aut tempora, in vnam summam. Quod si tempora pecunijs intercurrant, ducatur quælibet pecunia in suum tempus, deinde fiat collectio. Collectione facta, statuatur primo loco summa collecta; secundo lucrum, vel damnum: tertio singulorum pecuniæ in sortem datæ, aut producta ex pecunijs & temporibus facta.

Primum exemplum. Tres mercatores lucrati sunt 300 aureos. Primus exposuit 800 au. Secundus 672; Tertius 448, quæro quantum quilibet ex lucro 300 aureorum capiat? Addantur in vnam summam pecuniæ expositæ, nempe 800, 672, 448. Quo facto, dico, sūma pecuniæ expositę 1920 dat 300 aureorū lucrum, quid dant singulorum pecuniæ expositæ? & reperio pro primo 125 au. pro secundo 105, pro tertio 70.

		800
1920	300	672,
		448

Secundum. Tres mercatores in negotiatione perdiderunt 100 aureos. Contulerunt autem omnes æqualem pecuniæ summam; sed primi in sorte fuit mensibus 20; secundi 16; Tertij 14: quæro quantum quilibet damnum pati debeat? Mensium summa est 50. Ter ergo regula proportionum vsurpanda est, hoc modo: sed quia, cuius pecunia longiore tempore in sorte fuit, minus damni pati de-

		20
50	100	16
		14

bet, inuerto primi, & secundi menses, hoc modo, reperioq; operatione absoluta, damnum primi esse 28; secundi 32; tertij 40 aureorum.

		14
50	100	16, &
		20

Tertium. Tres lucrati sunt 1925 aureos: primus contulit in sortem 400 au. per 20 menses: secundus 500 per menses 25: tertius 600 per 30 menses. Quæro quantum quilibet ex lucro capiat? Duco menses in pecunias expositas, & produco hos numeros 8000. 12500. 18000; quorum summa est 38500. Iam vtor regula proportionum ter, hoc modo.

		8000.
38500	1925	12500.
		18000.

Absoluta operatione, reperio primum ex lucro capere 400 au. secundum 625; tertium 900. Summa omnium cum sit 1925, bene operati sumus.

Sed placet hoc ipsum exemplum aliter proponere. Tres mercatores lucrati sunt 1925 aureos. Primus per 20 menses exposuit 400: secundus exposuit 500: tertius 600. Accepit autem in distributione primus 400; secundus 625; tertius 900: quæro quot mensibus pecuniæ secundi, & tertij in sorte fuerint? Pecunia primi in sortem data ducta in suum tẽpus, facit 8000. Colloco ergo primo loco lucrum primi: secundo 8000: tertio lucra secundi, & tertij, hoc modo. 400 | 8000 | 625 900. operatione facta, proueniunt 12500, & 18000; quibus per pecunias expositas secundi, & tertij diuisis, proueniunt 25, & 30 tempora secundi, & tertij.

Quar-

Quartum. Tres lucrati ſunt 1500 aureos. Primus in ſortem contulit 2400 per 12 menſes: ſecundus contulit 1600: tertius in ſorte habuit ſuas pecunias 10 menſibus. Accepit autem primus ex lucro 600; ſecundus 500; tertius 400 au. Quæro quandiu pecunia ſecundi in ſorte fuerit, & quid tertius contulerit? Duco pecuniam primi in ſortem datam in ſuum tempus, & produco 28800. Iam colloco primo loco lucrum primi, ſecundo 28800, tertio lucra ſecundi, & tertij hoc modo. 600 | 28800 | $\frac{500}{400}$. Facta operatione reperio 24000, & 19200. Diuiſis igitur 24000 per pecuniam expoſitam ſecundi 1600, proueniunt 15; atq; tot menſibus pecunia ſecundi in ſorte fuit. Diuiſis verò 19200 per 10 tempus tertij, proueniunt 1920, pecunia in ſortem data tertij.

ARTICVLVS III.

DE REGVLA ALLIgationis.

Miſcet, & alligat hæc regula varia inter ſe precia, quorum duo, aut plura ſunt ſtatuta, & determinata; vnum arbitrarium, ſeu voluntariũ. Debet autem ſemper precium arbitrarium eſſe quaſi medium inter ſtatuta, non quidem exactè; ſed ita, vt ſi duo tantum ſint ſtatuta, vnum maius, alterum minus ſit arbitrario: ſi plura, ſaltem vnum ſit maius, aut vnum minus arbitrario.

Secundò, in preciorũ mixtura ponendũ eſt arbitrariũ ſiniſtrorſum: in medio ſtatuta; dextrorſũ differẽtię arbitrarij, & ſtatutorũ, alternè tñ, h. e. differentia arbitrarij, &

maioris ſtatuti ponenda eſt ad latus minoris ſtatuti; & contra differentia arbitrarij, & minoris ſtatuti, ad latus maioris ſtatuti. Si fuerint plura ſtatuta maiora arbitrario, & plura minora, perinde eſt quæcunque maiora cum quibuſcunque minoribus permiſceas; poſſunt enim mixturæ varijs fieri modis. Si tantum vnum ſit ſtatutum minus arbitrario, reliqua maiora, ponēda eſt differentia arbitrarij, & minoris ſtatuti ad omnium maiorum ſtatutorum latera; & omnes, omnium maiorum ſtatutorum differentiæ ad latus minoris ſtatuti. Idem intellige, ſi vnum tantum ſtatutum ſit maius arbitrario, reliqua minora.

Tertio; in operatione ponatur primo loco ſumma differentiarum: ſecundo numerus precij ſtatuti. Tertio ſingulæ differentiæ, & toties inſtituatur regula proportionum, quot ſunt differentiæ. Sed exemplis præcepta illuſtremus.

Primum. Sunt duo genera vini, menſura vnius venit 20, alterius 12 cruciferis; cupio ex vtroq; vnam menſurā emere, quæ conſtet 17 cruciferis; quæro quātum ex quolibet accipere debeam? Pono differentiam 17 & 20. ad latus dextrum 12: differentiam 17 & 12 ad latus 20 hoc modo: hic precium arbitrarium ſunt 17, ſtatuta 20, & 12; differentiæ 5 & 3.

17	20	5
	12	$\frac{3}{8}$

Dico ergo ſumma differentiarum, nimirum 8 dat 1 menſuram precij arbitrarij (nam vnam tantum emere volo, ſi enim plures vellem. V. G. 20, ponerem loco ſecundo 20) quid dant differentiæ 5 & 3? operatione abſoluta reperio ex menſura 20 cruciferorum $\frac{5}{8}$, ex menſura vero 12 cruciferorum $\frac{3}{8}$ vnius menſuræ, accipiendas. Si vellem emere 20, ſic exemplum ſtaret. $8 \mid 20 \mid \frac{5}{3}$. reperiremque ex vino 20 cruciferorum $12\frac{1}{2}$; ex vino vero 12 crucif. $7\frac{1}{2}$ menſuras accipiendas.

Eodem modo detegitur furtum aurifabri regis Hieronis, vt Vitruuius habet lib. 9. cap. 3. Cum enim Hiero Dijs auream coronam vouiſſet, & aurifaber ſublata portione auri, tantundem argenti ſubſtituiſſet, detexit Archimedes hac arte furtum. Accepit duas maſſas, vnam puri auri, alteram puri argenti, eiuſdem cum corona ponderis, miſitque & coronam, & vtramque maſſam in vas aqua plenum, quantumque quælibet aquæ eiecerit notauit. Ponamus maſſam auri eieciſſe 60 vncias aquæ, coronam 65, maſſam argenti 90. Hic aqua, quam corona eiecit, eſt precium arbitrarium; quam maſſæ auri & argenti, ſtatuta, vt hic apparet. $65 \,\Big|\, \begin{smallmatrix}90\\60\end{smallmatrix} \,\Big|\, \begin{smallmatrix}5\\25\end{smallmatrix}$. Iam ſi corona ponatur 100 librarum fuiſſe, Dico. Summa differentiarum 30, dat 100 libras, quid dant ſingulæ differentiæ? Inuenioque $16\frac{2}{3}$, & $83\frac{1}{3}$: Ergo $16\frac{2}{3}$ libras auri ſublegit, totidemque argenti ſubſtituit aurifaber.

Secundum exemplum. Sunt tria genera panni; primi generis vlna venditur 24, ſecundi 12, tertij 8 cruciferis. Cupio ex omnibus accipere vlnam quæ conſtet 18 cruciferis; quæro quantum ex quolibet genere accipere debeam? Hic arbitrarium precium, ſunt 18 cruciferi, ſtatuta 24, 12, & 8 cruciferi. Differentia 18 & 24, quæ eſt 6 ponitur, & ad 12, & ad 8: differentia vero tam 18 & 12, quam 18 & 8 ponitur ad 24, vt hic vides. Summa differentiarum eſt 28. Dico ergo 28 dant 1 vlnam,

$$18 \left| \begin{array}{c|l} 24 & 6.\ 10. \\ 12 & 6. \\ 8 & 6. \end{array} \right.$$

quid dant differentiæ 16. 6. 6, & inuenio ex vlna 28 cruciferorum $\frac{8}{14}$, ex vlnis 12, & 8 cruciferorum accipiendas esse $\frac{3}{14}$ vnius vlnæ.

Tertium. Libra croci venit 34, libra piperis 30, libra cinnamomi 18, libra cingiberis 16 cruciferis. Cupio ex omnibus 12 libras emere pro 4 aureis; quæro quantum ex quolibet genere accipere debeam? Primo indagandum est precium arbitrariũ, quod ita fit. Diuido 4 aureos, siue 240 cruciferos per 12, & reperio 20 cruciferos, precium arbitrarium. Sic ergo forma habet.

20	34	4
	30	2
	18	10
	16	14

Alligaui 34, & 16 cum 20; deinde 30 & 18: Quo facto dixi. Summa differẽtiarum 30 dat 12 libras, quid dant singulæ differentiæ? Reperiq; pro primo genere aromatum $1\frac{3}{5}$, pro secundo $\frac{4}{5}$, pro tertio 4, pro quarto $5\frac{3}{5}$ lib. quæ cum simul faciant 12, bene operati sumus.

Quando plura sunt precia statuta, vt in hac tertia quæstione, possunt alligationes fieri pluribus modis; possum enim etiam 34 cum 18; & 30 cum 16, ligare, vt hic apparet. Ex qua alligatione sequitur, ex primo genere aromatum accipiendas esse $\frac{4}{5}$, ex secundo $1\frac{3}{5}$, ex tertio $5\frac{3}{5}$, ex quarto 4 libras.

20	34	2
	30	4
	18	14
	16	10

Annotatio.

Quod fit ex precio arbitrario in summam differentiarum, æquale est illis, quæ fiunt ex omnibus preciis statutis in omnes differentias collaterales.

Item quod fit ex precio arbitrario in numerum precij arbitrarij; æquale est illis, quæ fiunt ex precijs statutis in partes

tes per regulam inuentas. Vt in tertio exemplo, quod fit ex 20 precio arbitrario in 12 numerum precij arbitrarij, æquale est illis, quæ fiunt ex 34 in $1\frac{7}{5}$, & ex 30 in $\frac{4}{5}$, & ex 18 in 4, & ex 16 in $5\frac{2}{5}$ &c.

ARTICVLVS IIII.

DE REGVLA POSITIONIS.

Hæc regula, quæ etiam regula Falsi dicitur, duplex est, simplicis, & duplicis positionis. Harum regularum hoc est discrimen, quod quidquid per primam solui potest, possit & per secundam; non contra. Prima regula tunc tantũ vsui esse potest, quando est, vt numerus per positionem inuẽtus, ad ipsam positionem; ita numerus notus ad inueniendum. Simplicis positionis quæstiones soluturus, pone pro numero inueniendo, numerum quemcunq;, cum eoq; progredere iuxta quæstionis sententiam, non secus, ac si ille esset numerus quæsitus. Ac tandem vtere regula proportionũ. Primo loco ponendo, quod inuentum est ex thesi. Secundò, numerum quem pro quæsito posuisti. Tertiò, illud quod in quæstione notum ponitur.

Primum exemplum. Tres inter se diuidunt 126 aureos, ea lege, vt secundus duplo, tertius triplo plus habeat primo. Pono primum habere 4; habet ergo secũdus 8; tertius 12: ergo omnes 24; deberent autem habere 126. Dico igitur 24 dant 4; quid dant 126, & reperio 21 pecuniam primi, habet ergo secundus 42; tertius 63; qui numeri cum coniuncti faciant 126, bene operati sumus.

Secundum. Cuidam quatuor debitores debent 1000 aureos. Si primus quotannis persoluat 18; secundus 16; tertius 10; quartus 6: quæro quanto tēpore totum debitum sint persoluturi, & quantum quisque debeat? Pono 6 annis, quibus dat primus 108; secundus 96; tertius 60; quartus 36: qui numeri coniuncti faciunt 300, deberent autem facere 1000. Dico ergo. 300 dant 6; quid dant 1000, & reperio 20: Ergo annis 20 totum debitum persoluetur: quibus dat primus 360; secūdus 320; tertius 200, quartus 120: qui numeri cum simul faciant 1000, bene operati sumus.

Tertium. Quidam rogatus, quot haberet pecunias, respondit. Si adhuc haberem tot, quot habeo, & præterea $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{3}$ meæ pecuniæ, haberem 85 aureos.

Quæro quantum habeat? Ponatur habere 6; quibus si adhuc tot addam; Item $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$, scilicet 3, & 2, conflabo 17. Dico ergo 17 dant 6; quid dant 85, & reperio 30 aureos; quibus si addantur 30, & dimidium, nempe 15, & $\frac{1}{3}$ scilicet 10, conflabuntur 85.

Quartum. Hæreditatis meæ $\frac{2}{3}$ pro censu annuo exposui; $\frac{1}{4}$ ludendo amisi, retineo adhuc 115 aureos; quæro quanta fuerit hæreditas? Pono fuisse 12 au. cuius $\frac{2}{3}$ sunt 8; $\frac{1}{4}$ est 3: summa 11; quibus ex 12 subtractis restat 1; deberent autem 115 restare. Dico ergo 1 dat 115; quid dant 12? &c. reperio 1380 aureos. Cuius $\frac{2}{3}$ sunt 920; $\frac{1}{4}$ est 345, quæ quia cum 115 faciunt 1380, bene operati sumus.

De duplici positione.

Regula duplicis positionis sic habet. Pone pro numero

mero inueniendo numerum quemcunque, cumque illo procede iuxta quæstionis sententiam; qui si quæstioni satis fecerit, erit ille numerus quæsitus. Si non satis fecerit, pone errorem infra positionem cum litera P, vel M, prout per excessum, vel defectum erratum fuerit.

Secundò, pone alium numerum, cùm quo, vt cum priore, procede, errore cum litera P, vel M, infra positionem collocato.

Tertiò, si vterq; error habuerit P, vel M, (quæ literæ significant plus, & minus) subtrahe minorem ex maiore, residuum erit diuisor. Si alter habuerit P, alter M, adde errores, eritque vtriusque summa diuisor.

Quartò, duc per crucem primam positionem in errorem secundum; secundam in errorem primum; productum minus tolle ex maiore, si vterque error habuerit P, vel M: si vnus P, alter M, adde producta.

Quintò. Residuum, aut summam diuide per diuisorem ante repertum, & erit, quod prouenit, numerus occultus, qui quæritur.

Primum exemplum. Duo habent pecunias, si primus dat secundo 7 au. habet secundus triplo plus primo: si vero secundus dat primo 3, habet vterq; æqualem summam, quæro quantum quilibet habeat?

Pono pro pecunia primi numerum quẽcunque, dummodo maior sit quam 7, vt secundo possit dare 7. Ponamus igitur primum habere 19 aureos, ex quibus si dederit secundo 7, retinebit ipse 12, cuius triplum est 36, ex quo si tol-

19		21
29		35
Error 4 M	4	8 M. Error
Primus	Diuisor.	Secundus

las 7, restant 29, pecunia secundi. Si secundus det primo 3, retinebit ipse 26, & habebit primus 22, qui numerus cum minor sit numero 26, errauimus per defectum, hoc numero 4, qui est error primus. Ponatur secundo primus habere 21 au. qui vbi secundo dederit 7, retinebit ipse 14; ex cuius triplo 42, si tollo 7, restant 35, pecunia secundi. Qui si primo dederit 3, retinebit ipse 32, & habebit primus 24; qui numerus cum sit minor, quam 32, iterum per defectum hoc numero 8, erratum est. Subtrahe minorem errorem ex maiore, & restabit Diuisor 4. Duc deinde per crucem, tam 8, secundum errorem in 19, primam positionem; quam 4, primum errorem in 21, secundam positionem, & produces 152, & 84. Subtractis 84 ex 152, restant 68, quibus per 4 diuisis, proueniunt 17, pecunia primi. Rursus si ducas, tam 8 in 29; quam 4 in 35, produces 232 & 140. Subtractisque 140 ex 232, & residuo 92 per 4 diuiso, proueniunt 23, pecunia secundi. Nam si primus, qui habet 17, det secundo, qui habet 23, septem, habebit secundus 30, primus 10. Si vero secundus dederit primo 3, habebit vterq; 20: quæstio ergo recte soluta est.

60		80
180		160
120. M.		P. 80
	200 Diuisor.	

Secũdum. Diuidatur numerus 240 in duas partes, vt si minor ducatur in 7, maior in 3, producta fiant æqualia. Ponatur minor 60; erit ergo maior 180. Si ille in 7, hic in 3 ducatur, producentur 420, & 540; erratum ergo est per defectum hoc numero 120.

Ponatur secundo minor 80; erit igitur maior 160: si ille in 7, hic in 3 ducatur, producentur 560, & 480; erratum igitur est per excessum, hoc numero 80. Summa errorum 200, est diuisor. Si iam per crucem tam 120 in 80; quam 80 in 60 ducantur, producentur 9600, & 4800; quorum summa 14400 per Diuisorem 200 diuisa, reddit 72, partem primam, & minorẽ; qua ex 240 subtracta, restat maior 168: nam tam 72 in 7; quam 168 in 3 ducta, producunt 504.

ANNOTATIO I.

Gemma Frisius hanc regulã extendit ad radicum extractiones; verum cum in multis exemplis fallat, non ducimus operæ precium plura de illa dicere. Nam si proponatur talis quæstio. Dentur duo numeri in dupla proportione, vt in se ducti procreent 98; succedit regula Gẽmæ; si vero talis proponatur. Dentur duo numeri, quorum excessus sit 4, vt in se ducti producant 165, fallit. Cæterum similium quæstionum solutiones petantur ex art. 3. cap. 3. lib. 2.

ANNOTATIO II.

Praxin Italicam, & alia Compendia in regulis hactenus traditis consulto omisi, quod vsu melius, quã regulis discatur: multitudine enim regularum obruimur, quæ vsu discimus, tenacissimè hærent. Quis.n.non videt, si vel mediocriter in calculo sit exercitatus, posse in regula proportionũ pro magnis homogeneorũ terminis, minores eiusdẽ proportionis substitui? Vt pro 12 & 36, hos 1, 3: pro 225 & 1575, hos, 1, 7: Si.n. talis ꝓponatur quæst. Aureis 225 emo 87 vrnas vini quãtũ emo aureis 1575? totidẽ vrnas inuenio, quot inuenirẽ, si dicerem, aureo 1, emo 87 vrnas, quot emo aureis 7? Vtrobiq; enim

enim inuenio vrnas 609, quod vtrobiq; homogeneorum terminorum septupla sit proportio.

CAPVT IIII.

DE NVMERORVM proprietatibus.

In hoc cap. primò agam de numero absolutè considerato. Secundò, de numero relato. Tertiò, de numero geometricas figuras repræsentante.

ARTICVLVS I.

DE NVMERO ABSOlutè considerato.

Numeri absolutè considerati. Primò diuiduntur in pares, & impares. Pares sunt, quos binarius numerat; Impares, quos binarius non numerat.

Species parium duæ sunt. Sunt enim, aut pariter pares; aut pariter impares. Pariter par est, quem numerus par per parem metitur, cuiusmodi est 8. quem 2 per 4 metitur. Pariter impar est, quem par per imparem metitur, vt est numerus 10, quem 2 per 5 metitur.

Impariter impar non est species paris, sed imparis, cuiusmodi est numerus 15, quem impar per imparem metitur, vt 3 per 5.

Proprietates parium, & imparium sunt. Prima par additus pari, facit parem. Secunda. Par additus impari, facit imparem. Tertia. Impar additus impari, facit parem. Quarta. Par subtractus à pari, relinquit parem.

Quin-

Quinta. Par ſubtractus ab impari, relinquit imparem.
Sexta. Impar ſubtractus ab impari, relinquit parem.

Primus numerus eſt, quem ſola vnitas metitur, cuiuſmodi ſunt 3. 5. 7. 11. 13. &c.

Primi inter ſe ſunt, quos ſola vnitas metitur, cuiuſmodi ſunt 3 & 4, 8 & 9, 10 & 13 &c.

Numerus compoſitus eſt, quem aliquis numerus metitur; Cuiuſmodi ſunt 4. 6. 8. 10. 12. &c.

Compoſiti inter ſe ſunt, quos aliquis numerus, qui communis eorum menſura dicitur, metitur.
Cuiuſmodi ſunt 4 & 8; 6 & 12; 4 & 10; 16 & 20 &c. duos priores metiuntur 2 & 4. duos ſequentes 2. 3 & 6; duos tertios 2. Duos poſtremos 2, & 4.

Numerus perfectus eſt, qui ſuis partibus eſt æqualis cuiuſmodi ſunt 6. 28. 496.

Abundans eſt, qui ſuis partibus eſt maior.

Diminutus, qui ſuis partibus eſt minor. Intelligo per partes, partes aliquotas; ſeu quotos illorum numerorum, per quos diuidi poſſunt: Vt 6 diuidi poteſt per 2 3 & 6, quorum quoti 3. 2. 1. faciunt 6. Et 28 diuidi poteſt per 2. 4. 7. 14. 28; quorum quoti 14. 7. 4. 2. 1. faciunt 28. Numerum 12 diuidunt 2. 3. 4. 6. 12; quorum quoti 6. 4. 3. 2. 1. faciunt 16, plus quam 12. Numerum 10 diuidunt 2 & 5; quorum quoti 5 & 2 faciunt 7, minus quam 10. Vnde 6 & 28 ſunt numeri perfecti. 12 abundans. 10 diminutus.

Perfecti inueniũtur ex progreſſione geometrica duorum parium, vt ex 2 & 4. ex 4 & 8; ex 16 & 32; ex 64 & 128; ex 256 & 512; ex 1024 & 2048 &c. Si nimirum ex maiore tollatur vnitas, reſiduum ducatur

tur in minorem: ita ex 2 & 3 fiunt 6. Ex 4 & 7 fiunt 28. ex 16. & 31 fiunt 496. ex 64 & 127 fiunt 8128 &c.

Annotatio.

Pares & impares inter absolutos, non inter relatos repono, quod eorum definitiones absolutæ & absolutorum sint, non relatæ & relatorum.

Articulus II.

De Numero Relato.

Huc pertinent proportiones, proportionalitates, & medietates, siue progressiones, de quibus singulis compendio est agendum.

De Proportionibus.

Proportio triplex est, æqualitatis, maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis. Æqualitatis est, quando æqualis numerus ad æqualem refertur, vt 4 ad 4.

Maioris inæqualitatis est, quando maior numerus ad minorem; Minoris, quando minor ad maiorē refertur. Vtriusq; quinq; sunt species. Prima maioris inæqualitatis dicitur Multiplex. Secunda superparticularis. Tertia superpartiens. Quarta Multiplex superparticularis. Quinta Multiplex superpartiens.

Multiplex est, quando maior minorem aliquoties cōtinet. Vt bis, ter, quater, decies, centies, &c. Cuiusmodi cernitur inter 4 & 2; inter 9 & 3; inter 20 & 5; inter 100 & 10 &c. quarum prima dicitur dupla, secunda tripla, tertia quadrupla, quarta decupla, &c.

Superparticularis est, quando maior minorem semel

conti-

continet, & insuper vnam eius partem: cuiusmodi proportio est inter 3 & 2: inter 4 & 3; inter 9 & 8. Prima dicitur sesquialtera; secũda sesquitertia: Tertia sesquiquarta: quarta sesquioctaua. Est proportio superparticularis inter omnes numeros vnitate sese excedentes, & inter eorum æquè multiplices. Vt inter 12 & 11: inter 36 & 33: inter 60, & 56, &c. Dicuntur 36, & 33, ipsorum 12 & 11 æquè multiplices, cum creentur ex ductu ipsorum 12, & 11, in 3: Similiter 60, & 56 fiunt ex 15 & 14, in 4. Superpartiens est, quando maior minorem semel, & insuper aliquot eius partes continet: Cuiusmodi proportio est inter omnes numeros inter se primos, modo eorũ excessus sit plus quam vnitas. Item inter eorum æquè multiplices: Cuiusmodi est inter 7, & 5: inter 14 & 10: inter 27 & 17: inter 81 & 51. Prima, & secunda dicitur superquintupartiens duas; Tertia & quarta superseptemdecupartiens decimas &c.

Multiplex superparticularis, composita ex multiplici, & superparticulari est, quando maior minorem aliquoties, & insuper vnam eius partem continet: Cuiusmodi est inter 5 & 2: inter 19 & 6; inter 29 & 7: prima dicitur dupla sesquialtera: Secunda tripla sesquisexta: Tertia quadrupla sesqui septima.

Multiplex superpartiens, ex multiplici, & superpartiẽte cõposita est, qñ maior minorẽ aliquoties, & insuper aliquot eius partes continet; cuiusmodi est inter 34 & 7: inter 14 & 5. prima dicirur quadrupla superseptupartiens sextas: secunda dupla superquintupartiens quartas.

Proportio minoris inæqualitatis est, qñ minor cũ maiore comparatur. Easdem quas prior habet species; sed præfigitur illis particula (Sub) vt submultiplex, sub-

superperparticularis; ſubſuperpartiens, &c. Hinc inter 2 & 4 dicitur eſſe proportio ſubdupla; inter 2 & 3 ſubſeſquialtera; inter 3 & 12 ſubquadrupla &c.

ARTICVLVS III.
DE PROPORTIONVM *Compoſitione.*

Proportionum Compoſitio fit per Additionem, ſubtractionem, multiplicationem, & diuiſionem, quam Cla. in fine lib. 9. Euclid. explicat. Cum enim addit proportionem proportioni, addit inter ſe denominatores proportionis. Vt ſi addendæ ſint dupla & tripla, fit quintupla, quod ex additione denominatorum 2 & 3, fiant 5. Si addenda ſit dupla ſeſquioctaua ad triplam ſeſquiquartam, fiet $5\frac{3}{8}$, ſcilicet quintupla ſuperoctupartiens tertias. Nam denominator duplæ ſeſquioctauæ eſt $2\frac{1}{8}$, triplæ ſeſquiquartæ $3\frac{1}{4}$, quæ inuicem additæ, faciunt $5\frac{3}{8}$.

Cum proportio proportioni ſubtrahitur, denominator minor ex maiore ſubtrahitur, vt ſi dupla ex ſextupla ſit ſubtrahēda, reſtat quadrupla: ſi ſeſquialtera ex tripla, reſtat ſeſquialtera: nam denominator ſeſquialteræ eſt $\frac{3}{2}$; triplæ 3, ſiue $\frac{6}{2}$: ſubtractis autem $\frac{3}{2}$ ex $\frac{6}{2}$, reſtant $\frac{3}{2}$, ſiue $1\frac{1}{2}$. In multiplicatione proportionis, in ſe ducuntur denominatores proportionis, vt ſi tripla ſit ducenda in quadruplam, gignetur duodecupla. Si tripla ſuperſeptupartiens tertias in duplam ſeſquiquartam, hoc eſt, $3\frac{3}{7}$, in $2\frac{1}{4}$, producetur $7\frac{5}{7}$, hoc eſt, ſeptupla ſuperſeptupartiens quintas.

Eodem

Eodem modo in diuiſione diuiditur maior proportionis denominator per minorem. Vt ſi diuidenda ſit decupla per duplam, proueniet quintupla: ſi quadrupla ſuperquadrupartiens tertias per ſeſquialteram, hoc eſt, $4\frac{7}{4}$ per $1\frac{1}{2}$, proueniet tripla ſeſquiſexta, hoc eſt $3\frac{5}{6}$. Vides ergo eodem modo proportionum Multiplicationem, & Diuiſionem fieri, quo numerorum fractorum.

ARTICVLVS IIII.

DE ANALOGIA, SIVE proportionalitate.

Authores plerique Analogiam vocant medietatem. Numerantur analogiæ plures; ſed ex illis tres ſunt præcipuæ, Arithmetica, Geometrica, & Muſica, quas etiam progreſſiones appellamus. De ſingulis pauca dicenda ſunt.

DE PROGRESSIONE Arithmetica.

Arithmetica progreſſio eſt ſeries numerorum, in qua tres, aut plures numeri per eandem differentiam progrediuntur, vt hic eſt videre.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. &c.

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20. 22. 24. 26. 28. 30. 32. 34. 36. 38. 40. 42. 44. &c.

1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. 25. 27, 29. 31. 33. 35. 37. 39. 41. 43. &c.

5. 10. 15. 20. 25. 30. 35. 40. 45. 50. 55. 60. 65. 70. 75. 80. 85. 90. 95. 100. &c.

Prima progreditur per vnitatē, semper enim sequens numerus præcedentem vnitate superat. Secunda, & tertia per 2. Quarta per 5. Omnium summa facillimè habetur hoc modo. Adduntur primus & vltimus termini; summa per semissem numeri terminorum; vel semissis summæ per numerum terminorum multiplicatur, & habetur summa omnium. In prima progressione primus & vltimus termini faciunt 25, quæ in 12 semissem numeri terminorum ducta faciunt 300, summam omnium. In secunda progressione summa primi, & vltimi termini 46, in 11, semissem numeri terminorum ducta, progignit 506, omnium summam. Eodem modo reperies summam tertiæ 484; quartæ 1050.

Habetur quoque summa omnium imparium ab vnitate incipientium, cuiusmodi est progressio tertia, si numerus terminorum in se ducatur: nam si 22, numerus terminorum tertiæ progressionis, in se ducatur, procreantur 484, vt prius. Parium verò à binario incipientium summa habetur, si numerus terminorum in numerum vnitate maiorem numero terminorum ducatur. Si enim in secunda progressione 22, qui est numerus terminorum, ducatur in 23, procreabuntur 506, vt prius.

REGVLÆ PROGRESSIONIS *Arithmeticæ.*

Prima. Si numerus terminorum vnitate mutilatus, ducatur in differentiā terminorū, productoq; addatur terminus primus, prodibit vltimus. Vt si in progressione quar-

quarta, habente 20 terminos, 19 in 5 ducantur, & producto terminus primus addatur, conflabuntur 100, terminus vltimus.

Secunda. Primus terminus habetur, si sublata vnitate è numero terminorum, reliquum in differentiam ducatur, & productum ab vltimo termino tollatur. Vt in hac progressione 10. 20. 30. 40. 50. 60 habente sex terminos, si vnitas ex 6 tollatur, reliquum in differentiam 10 ducatur, producētur 50, quibus ex vltimo termino 60 deductis, restant 10. terminus primus.

Tertia, si primus terminus ab vltimo tollatur, reliquum per numerum vnitate minorem numero terminorum diuidatur, prodit progressionis differentia. Vt in progressione proxima, si tollam 10 ex 60, reliquum 50 diuidam per 5 numerum vnitate minorem numero terminorum, proueniunt 10, differentia progressionis.

Quarta, si sublato termino primo ab vltimo, reliquum per differentiam diuidatur, & quoto vnitas addatur, prouenit numerus terminorum. Vt si in eadem progressione 10 tollam ex 60, reliquum per differentiam 10 diuidam, & quoto vnitatem addam, exurgent 6, numerus terminorum.

Quinta, si ab vltimo termino primus tollatur, residuum erit summa differentiarum,

PROPRIETATES PROgressionis Arithmeticæ.

Prima. Datis tribus quibuscunque progressionis terminis continuis, erit duplum medij æquale aggregato extremorum. Vt in his tribus 7. 8. 9, est tam duplum medij, quam aggregatum extremorum 16.

Secunda. Datis quatuor continuis, erit summa mediorum æqualis summæ extremorum.

Tertia. Duplum cuiuscumque est æquale aggregato duorum æqualiter hinc inde distantium. Vt duplum ipsius 8, est æquale aggregato ex 1 & 15 facto; æqualiter autem, 1 & 15 ab 8 hinc inde distant in prima progressione.

DE PROGRESSIONE Geometrica.

Geometrica progressio est series numerorum eadem se proportione superantium, cuiusmodi sunt sequẽtes.
1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512. 1024. 2048. 4096. 8192. &c.
1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187. 6561. 19683. 59049. 177147. 531441. &c.
1. 4. 16. 64. 256. 1024. 4096. 16384. 65536. 262144. 1048576. &c.

Prima est dupla, secunda tripla, tertia quadrupla. Summa omnium habetur; si primus terminus tollatur ab vltimo, residuum diuidatur per numerũ vnitate minorem denominatore propottionis (est autem denominator duplæ 2; triplæ 3; quadruplæ 4. &c.) & quoto addatur vltimus terminus. Ita inuenies summam omnium primæ progressionis esse 16383; secundæ 797161; tertiæ 1398101.

Geometrica progressio duplex est, continua, & discreta. Continua est, quando omnes termini præter primum,

mum, & vltimum, ſunt antecedentes & conſequentes. Nam, vt 4 ſe habent ad 8; ita 8 ſe habent ad 16; & vt 16 ſunt ad 32; ita 32 ad 64; & ita 64 ad 128, &c. Vides ergo in hac dupla progreſsione 4. 8. 16. 32. 54. 128, omnes terminos eſſe antecedentes, & conſequẽtes, præter primum, & vltimum, quorum ille tantum eſt antecedens, hic tantum conſequens.

Progreſſio diſcreta eſt, in qua non omnes termini ſunt antecedentes, & conſequentes, hoc eſt, non eſt, vt primus ad ſecundum; ita ſecundus ad tertium: ſed tantum, vt primus ad ſecundum; ita tertius ad quartum. Talis progreſſio cernitur in his quatuor numeris 2. 4. 3. 6. in quibus eſt, vt 2 ad 4; ita 3 ad 6; non autem, vt 2 ad 4; ita 4 ad 3, cum inter 2 & 4 ſit ſubdupla; inter 4 & 3 ſeſquitertia proportio.

Proportiones diſcretæ occurrunt plerumq; in regula proportionum.

PROPRIETATES PROgreßionum geometricarum.

Vt melius intelligantur proprietates geometricæ progreſſionis notabis, Numerum in ſe ipſum ductum dici quadratum, vt eſt numerus 9, qui naſcitur ex 3 in ſe, ſiquidem ter 3 ſunt 9. Deinde idem numerus in quadratum ductus dicitur cubus, vt eſt numerus 27; nam ter 9 ſunt 27. Idem numerus ductus in cubum, dicitur biquadratum: Idem in biquadratum dicitur ſuperſolidus primus &c.

Prima proprietas. In omni progreſſione geometrica con-

continua numerus tertius est quadratus, & vno prætermisso quintus, septimus, nonus, vndecimus, &c. Quartus verò est cubus, & duobus prætermissis septimus, decimus, decimus tertius, &c. Rursus quintus est biquadratus, & tribus prætermissis, nonus, decimus tertius, &c.

Secunda proprietas. Si quicunque terminus in se ducatur in continua proportione, tantum aberit productus ab illo, quantum ipse abest ab vnitate. Vt in progressione prima, quartus, hoc est, 8 tantum abest ab vnitate, quantum ipse abest à 64. Vnde manifestum est, non esse necesse, vt omnes intermedij termini inueniantur. Vt si in prima progressione inuenire velim terminum vigesimum septimum, duco in se decimum quartum, nempe 8192, producoq; 67108864; hic in se ductus progignit quinquagesimum tertium.

Tertia proprietas. Datis tribus terminis quibuscunque progressionis continuæ, erit quadratum medij, æquale producto extremorum.

Quarta. Datis in continua progressione quatuor quibuscunq; terminis, erit productum mediorum, æquale producto extremorum. Idem in discreta verum est, si fuerit, vt primus ad secundum, ita tertius ad quartum. *Vnde si in regula proportionum productum primi, & quarti æquale fuerit producto secundi & tertij, operatio legitima erit.*

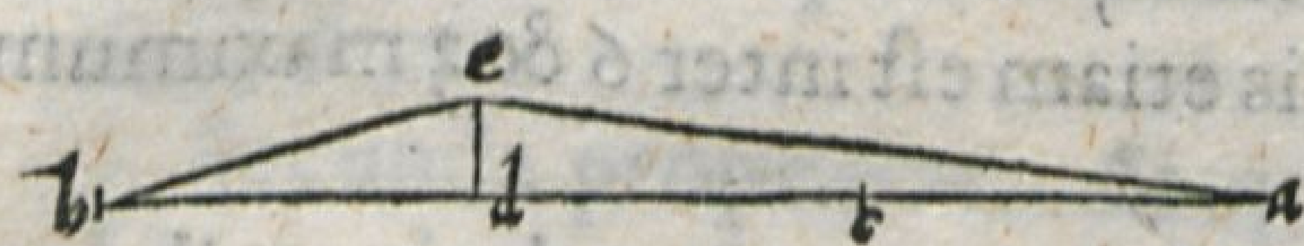
Quinta. Quadratum cuiuscunque numeri progressionis continuæ, est æquale producto duorum æqualiter ab ipso distantium.

De progreßione Musica.

Musica

Musica progressio est talis trium numerorum series, vt quæ est proportio maximi, & minimi, ea sit differentiarum maximi & medij, & medij atque minimi. Vt in his tribus numeris videre licet, 6. 4. 3. Differentia maximi, & medij est 2; medij & minimi 1. inter quos est proportio dupla, qualis etiam est inter 6 & 3 maximum, & minimum.

Reperiuntur tres musicè proportionales, ex tribus arithmeticè proportionalibus, si primus arithmeticè proportionalis in secundũ, & tertium secundus verò in tertiũ ducatur. Ita ex his tribus 2. 4. 6. arithmeticè proportionalibus, reperiuntur hi tres 8. 12. 24. musicè proportionales. Quod autem eiusmodi numeri sint musicè proportionales, inde cõstat, quod in plerisq; reperiantur tres illæ proportiones, ex quib. tota Musica pendet; nimirũ dupla, siue διὰ πασῶν, quæ octauam constituit: sesquialtera, siue διὰ πέντε, quæ quintã cõstituit: sesquitertia, siue διὰ τεσσάρων, quæ constituit quartam. Cernuntur enim in his numeris 6. 4. 3. dictæ proportiones: nam inter 6 & 3 est dupla: inter 6 & 4 sesquialtera: inter 4 & 3 sesquitertia. At in his 24. 12. 8 cernuntur tripla, quæ est composita ex dupla, & sesquialtera, estq; apud musicos duodecima: dupla, & sesquialtera, hoc est, octaua, & quinta. Quod vt melius intelligas, noueris apud musicos esse vndecim consonantias, non quod plures non sint, cum infinitæ sint; sed quod his vndecim tãtum in cantilenis componendis vtantur musici. Sunt autẽ istæ 1. 3. 5. 6. 8. 10. 12. 13. 15. 19. 20; quarum hæ sex 1. 5. 8. 12. 15. 19. sunt perfectæ: Hæ quinq; 3. 6. 10. 13. 20 imperfectæ. Componitur tertia ex 32 & 27. quinta ex 3 & 2. Sexta ex 27 & 16. Octaua ex 2 & 1. Decima ma ex 64 & 27. duodecima ex 3 & 1. decima tertia ex 27 & 8. decima quinta ex 4 & 1. decima nona ex 6 & 1. vigesima ex 27 & 4; quarta ex 4 & 3. Tonus ex 9 & 8. Semitonium maius ex 2187 & 2048; semitonium minus ex 256 & 243. &c. Quæ dicta sunt fortassis melius intelliges ex hac figura.



In qua spacium in tot partes sit diuisum, quot faciunt duo numeri consonantiam cõponentes, numereturq; ex b in d minor numerus; ex d in a maior; atque ex d fulcrum erigatur; nam si tangantur chordæ a e, e b edetur illa consonantia, quam numeri illi componunt. Exemplum. Octaua componitur ex 2, & 1: Si ergo a b a in d 2; á d in b vnum numeretur, erigaturq; ex d fulcrum, & vtraque pars chordæ a e, e b tangatur, edetur octaua. Si verò a d in tres, d b in duas diuidatur edetur quinta, &c.

Aduertendum etiam est, duos illos numeros, ex quibus consonantiæ componuntur, per modum fractionis poni; hoc modo $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$. Iam si consonantiæ consonantia addenda sit, ducantur tam superiores, quam inferiores in se; ita vt ex his $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, octaua nimirum, & quinta, fiat hæc $\frac{2}{6}$, siue $\frac{1}{3}$, nempe duodecima. Si verò vna ab altera subtrahenda sit, fiat id per crucem. Vt si hæc $\frac{2}{3}$ ex hac $\frac{1}{2}$, nempe quinta ex octaua sit subtrahenda, remanebit hæc $\frac{3}{4}$, scilicet quarta. Sed hæc musicis relinquimus.

Articvlvs V.

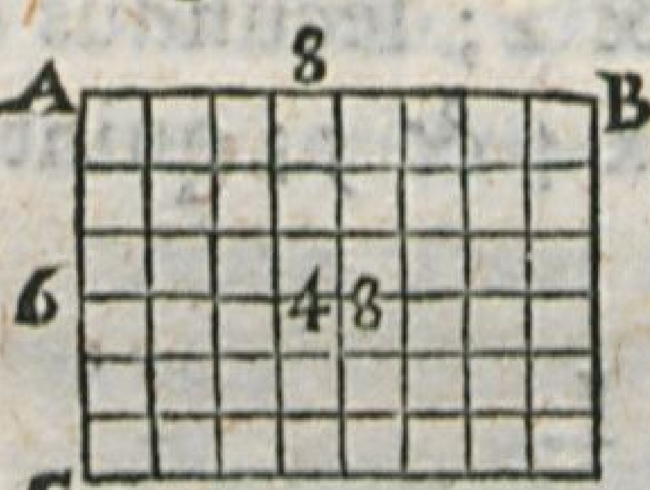
De numero figuras geometricas repræsentante.

Figu-

Figuræ geometricæ numeris repræſentatæ, ſunt aut planæ, aut ſolidæ. Planæ ſunt, trilateræ, quadrilateræ, & multilateræ. Solidæ, ſunt cubi, parallelepipeda, columnæ, pyramides, &c.

DE NVMERIS *planis.*

Numerus planus eſt, qui gignitur ex ductu duorum numerorum in ſe. Vt ſi 8 in 6 ducantur, gignentur 48, qui numerus planus dicitur.



Multiplicantes, vocantur latera. Vt ſi in figura BC, latus AB ponatur 8, AC 6 pedum: figura ipſa dicetur plana. Habet hæc figura 48 cellulas, quæ omnes ſunt quadratulæ, & dicuntur pedes quadrati, ſi quidem latera pedibus menſurentur.

Numerus quadratus eſt, qui ex numero in ſeipſum ducto creatur, cuiuſmodi ſunt 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81. 100. &c. Nam primus ex binario in ſeipſum ducto creatur, ſecundus ex ternario, tertius ex quaternario.

Sunt præter quadratos, numeri triangulares, pentagoni, hexagoni, heptagoni, octogoni. Triangulares fiunt ex ſumma progreſſionis arithmeticę ab vnitate incipientis, cuius differentia eſt vnitas. Ita ex 1 & 2 fit 3; ex 1. 2. 3 fit 6; ex 1. 2. 3. 4. fit 10. &c.

Quadrati fiunt ex ſumma progreſſionis arithmeticæ ab vnitate incipientis, cuius differentia eſt binarius. Ita ex 1 & 3 fit 4. Ex 1. 3. 5. fit 9. Ex 1. 3. 5. 7. fit 16. &c

Pentagoni creantur ex ſumma progreſſionis arithmeticæ ab vnitate incipientis, cuius differentia est ternarius; Ita ex 1. 4. fit 5; ex 1. 4. 7 fit 12. ex 1. 4. 7. 10 fit 22. &c.

Hexagoni creantur ex summa progressionis arithmeticæ ab vnitate incipientis, cuius differentia est quaternarius. Ita ex 1, 5. fit 6. Ex 1. 5. 9. fit 15. Ex 1. 5. 9. 13 fit 28. &c.

Heptagoni fiunt ex simili progressione, cuius differentia est 5; octogoni ex illa, cuius differentia est 6. &c.

Numerus altera parte longior est, qui producitur à duobus sola vnitate differentibus, cuiusmodi sunt. 2. 6. 12. 20. 30. 42. primus nascitur ex 1 & 2; secundus ex 2 & 3; tertius ex 3 & 4; quartus ex 4 & 5; quintus ex 5 & 6 &c.

Annotatio I.

	Radices	△	□	Pentagoni	Hexagoni	
	1	1	1	1	1	
	2	3	4	5	6	
A	3	6	9	12	15	B
	4	10	16	22	28	
	5	15	25	35	45	
	6	21	36	51	66	
	7	28	49	70	91	
	8	36	64	92	120	
	9	45	81	117	153	

Ex hac tabula apparet.

Primò. Pentagonũ generari ex quadrato collaterali, & triangulo præcedente.

Secundò, Hexagonum ex quadrato collaterali, & duplo præcedẽtis trianguli.

Tertio. Omnes lineas transuersales esse progressiones

nes arithmeticas. Ita vides in linea AB, si ad hexagonum 15 addantur 3, fore heptagonum; si ad hunc 3, fore octogonum; si ad hunc 3, fore enneagonum, &c.

Quartò. Si ex duplo quadrati subtrahatur radix, restare collaterale Hexagonum.

Quintò. Semissem summæ Hexagoni, & radicis, esse quadratum.

Sextò. Duplum quadrati mutilatum triangulo collaterali, relinquere Pentagonum collaterale.

Septimò. Datis tribus triangularibus continuis, summam extremorum vnitate excedere duplum medij.

Octauò. Datis quatuor triangularibus continuis, summam extremorum binario excedere summam mediorum.

Nonò. Duos continuos triangulares constituere quadratum.

Decimò. Summam quadratorum duorum triangularium continuorum, constituere triangularem. Sint duo triangulares continui 3 & 6; eorum quadrata 9 & 36, faciunt 45, triangularem nonum.

Vndecimò. Datis tribus triangularibus continuis, productum extremorum cum medio, facere quadratum medij.

Duodecimò. Datis quatuor triangularibus continuis, productum extremorum, cum medijs vnitate excedere productum mediorum. Multa alia deducet ex hac tabula ingeniosus lector.

ANNOTATIO II.

Si quis miretur, cur, quando fractus per fractum minus vtroq; fracto, quando vero fractus per integrum multiplicatur, minus integro proueniat, is rem hinc facile intelliget. Quando af duco in 3, nempe in ad, de, ec producuntur

tur tres cellulæ: quando duo, nimirum af, fg duco in 3, ad, de, ec producuntur 6 cellulæ: quando vero dimidium duntaxat ab duco in ad, de, ec, producuntur tantum tres dimidiæ cellulæ, hoc est, $1\frac{1}{2}$: Patet ergo cur, quando duco $\frac{1}{2}$ in 3 producatur minus quam 3, hoc est tantum $1\frac{1}{2}$.

Quando vero fractum per fractum, aut integrum per fractum diuido, cur plus proueniat, sic ostendo. Toties vnitas continetur in quoto, quoties diuisor in diuidendo. Vt cum diuido 12 per 4, proueniunt 3, eo quod 4 in 12 ter cōtineantur. Ergo etiam cum diuido 3 per $\frac{1}{2}$, proueniunt 6; ideo, quod vt $\frac{1}{2}$ in 3 sexies continetur; ita etiam vnitas in quoto sexies contineri debeat. Idem de multiplicatione ostendo. Cum enim qualis est proportio vnius multiplicantis, & vnitatis, talis sit producti, & alterius multiplicantis, si multiplicentur 3 per $\frac{1}{2}$, sitq; vnitatis & $\frac{1}{2}$ proportio dupla; erit quoq; 3, & producti dupla, ac proinde productum erit $1\frac{1}{2}$, minus quam 3, alter multiplicantium.

ANNOTATIO III.

Possunt ex planorum numerorum notitia huiusmodi quæstiunculæ deduci. Est area circularis, cuius diametrus est 100 passuum, area 20 iugerum. Quæro si diametrus sit 350 passuum, quot iugerum futura sit area? Accipe pro diametris quadrata diametrorū, hoc modo, 10000 | 20 | 122500, & reperies, operatione absoluta, 245 iugera.

Eodem modo agendum est, si area sit quadrata, pentagona, hexagona, &c. Sit enim area quadrata, cuius latera ponantur 30 passuum, area 12 iugerum: quæro si latera ponantur 100 passuum, quot iugerum sit area? Accipe quæ *quadrata laterum, hoc modo, 900 | 12 | 10000, & reperies, operatione absoluta, 133 $\frac{1}{3}$ iugera.*

Idem in triangulis, & figuris oblongis similibus verum est. Sit enim trianguli rectanguli, abc latus ab, 40, bc 30 passuum; area 20 iugerum. Quaro si ab sit 120, bc 90 passuum, quanta futura sit area? Quadratum vtriusq; lateris minoris trianguli est 4900, vtriusque maioris

44100: ergo sic stat exemplum. 4900 | 20 | 44100, operatione absoluta reperies aream maioris trianguli 180 iugerum. Demonstratio pendet ex 19 & 20 sexti, & ex 2 duodecimi Euclidis.

DE NVMERO SOLIDO.

Numerus solidus est, qui ex tribus in se multiplicatis gignitur, vt, ex 2. 3. 4 fit 24. Solidus numerus, aut est cubus, aut parallelepipedum, aut pyramis, aut columna &c. Cubus est, cum tres æquales numeri in se ducuntur; vel cum idem numerus in se, postea in productū ducitur, veluti sunt numeri 8. 27. 64. 125. 216. &c. Primus fit ex 2; secundus ex 3; tertius ex 4, quartus ex 5, quintus ex 6. Parallelepipedum fit ex duobus, aut tribus; si ex duobus, erit basis quadrata; si ex tribus oblonga; possunt bases quoque esse triangulares, hexagonæ, pentagonæ, &c.

Pyramis, si habeat triangularem basim, fit ex aggregato omnium triangulorum, Quadratæ ex summa quadrato dratorum. Pentagonæ ex pentagonorum. Hexagonæ ex hexagonorum, &c.

Columnæ, cuiuscunq; generis sint, fiunt ex ductu cuiuscunque numeri in superficiem illius speciei, cuius sunt ipsæ columnæ, vt triangularis in triangulum, & numerum quemcunq; quadratæ in quadratum, & numerum quemcunque. Pentagonæ in pentagonum, &c. Vide hac de re Franciscum Maurolycum initio lib. primi.

Annotatio I.

Sequuntur ex numeris solidis hæc. Primò. Si duorum triangularium numerorum continuorum quadratum minoris ex quadrato maioris tollatur, restare cubum, cuius radix est radix maioris trianguli. Secundò, duos primos impares post vnitatem, nempe 3 & 5 constituere cubum binarij. Tres sequentes 7. 9. 11, cubum ternarij. Quatuor sequentes 13. 15. 17. 19, cubum quaternarij, &c. Quod si quis scire velit, qui impares cuiuscunq; radicis cubum constituant, deducat ex quadrato illius numeri numerum vnitate minorem, & habebit minimum imparem, eundem numerum eidem quadrato addat, & habebit maximum imparem. Exemplum. Volo scire, qui duodecim impares constituant cubum duodenarij. Quadrato duodenarij addo, & ab eodem tollo 11, nnmerum vnitate minorem duodenario, & reperio duos extremos impares 133 & 155; horum cum 10 intermedijs summa est 1728, & tantundem etiam facit cubus duodenarij.

Anno-

ANNOTATIO II.

Ex cognitione cubitales quæstiunculæ solui possunt. Fistula ænea, cuius foramen est vnius digiti, eijcit globum $\frac{3}{4}$, vnius libræ. quæro si foramen sit 4 digitorum, quot librarum esse debeat globus? Duc digitos ad cubos, & stabit sic exemplum 1 | $\frac{3}{4}$ | 64, facta operatione reperies 48 libras.

Alia. Est cubus, cuius latera sunt 6 pedum, capacitas 800 vrnarum; quæro si latera sint 4 pedum, quot vrnarum sit capacitas? Accipio pro lateribus cubos laterum, hoc modo. 216 | 800 | 64 reperioq; operatione facta, vrnas 237 $\frac{1}{27}$.

CAPVT V.

DE RADICVM EXTRActionibus.

Radices sunt numeri secundum naturalem ordinem ab vnitate procedentes, nimirum 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c. vt in secunda columna sub titulo ℞ cernis. Quadrati fiunt ex radicibus in se ductis, & notantur signo q. Cubi ex ductu radicis in quadratũ, & notantur signo ce. Biquadrati ex cubo in radicem, & notantur signo qq. supersolidi primi ex biquadrato in radicem, & notantur signo ß. Quadrati ex supersolido primo in radicem, & notanter signo q ce &c.

TABVLA RADICVM ET GRADVVM.

A B

2	1	3	4	5	6	7	8
R℞	q	ce	qq	ß	qce	ßb	qqq
1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256
3	9	27	81	243	729	2187	6561
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721
10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000

D C

B F

9	10	11	12
cece	qß	ßc	qqce
1	1	1	1
512	1024	2048	4096
19683	59049	177147	531441
262144	1048576	4194304	16777216
1453125	9765625	48828125	244140625
10077696	60466176	362797056	2176782336
40353607	282475249	1977326743	13841287201
134217728	1073741824	8589934592	68719476736
387420489	3486784401	31381059609	282429536481
000000000	10000000000	100000000000	1000000000000

D C

In septima columna sunt supersolidi secundi ßb. In octaua triquadrati qqq. &c. Vt tum characteres, tum gradus in infinitum extendas, voco numeros supremæ columnæ transuersæ CD graduales; perpendicularis AB, Radices. Characteres ergo extensurus, diuide numerum gradualem datum in numerum quemcumq;, diuisoremque, & quotum quære in numeris gradualibus, atque characteres illis subiectos coniunge, & habebis characterem numeri gradualis dati.

Exemplum. Cupio habere characterem numeri gradualis huius 12. diuido illum per numerum quemcumque 3, & proueniunt 4. characteres numerorum 3, & 4, nempe ce, & qq, coniungo, & habeo characterem numeri 12, hunc qqce characteri numerorum primorum, qui sunt 5. 7. 11. 13. 17 &c. est hic ß, cui addantur literæ B, C, D &c. characteri numeri 5 addi deberet A, sed communiter nulla addi solet.

Gradus extensurus, duc graduum datum in radicem respondentem.

Exemlpum. Volo extendere gradum hunc 4. columnæ perpendicularis EF, duco illum in radicem respondentem, 2, & produco 8, gradum sequentem; hoc rursus ducto in 2, produco gradum hunc 16. &c.

Quod si gradus remotos, non notis intermedijs, habere cupias, diuide numerum gradualem per numerum quemcunque, quotum, & diuisorem quære in columna transuersa CD; & vel quotum iuxta characterem diuisoris, vel diuisorem iuxta characterem quoti multiplica, & reperies gradum quæsitum. Exemplum. Cupio habere gradum duodecimum radicis 4 seu columnæ PQ. Diuido 12 per 3, proueniunt 4. character &

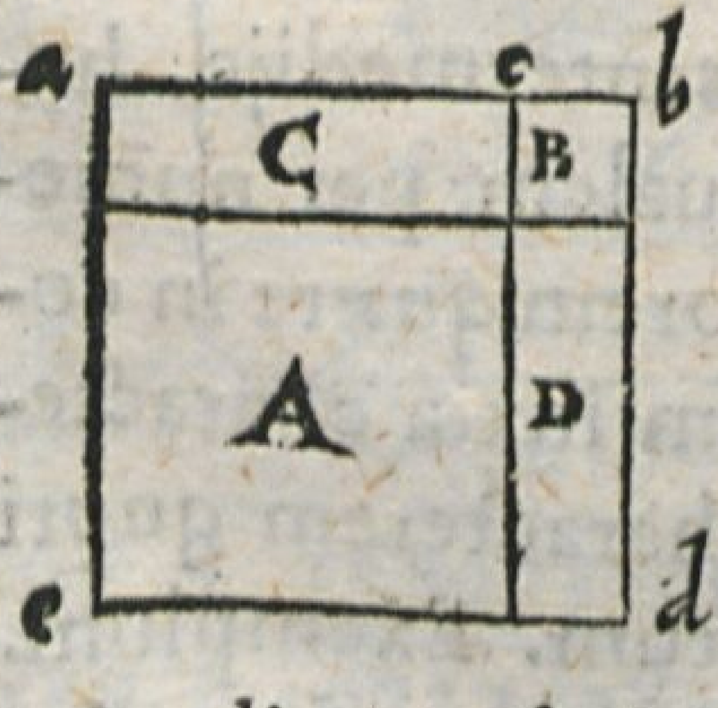
3 est ce, character 4 est qq. Aut ergo 64 cubum radicis 4, duco ad biquadratum; aut 256 biquadratum eiusdem radicis ad cubum, vtrum enim fecero, repererо 16777216. Reperiuntur ijdem gradus, si numerus gradualis diuidatur in quotcumque numeros, & gradus illis numeris subiecti in se sigillatim ducantur. Vt si 12 diuidantur in 3. 4. 5. & gradus illis in columna. V. G. PQ, subiecti, nimirum 64. 256. 1024. in se ducantur. Nam si duxero 64 in 256 produco 16384; si hũc numerũ in 1024 produco 16777216, &c.

ARTICVLVS I.

TABVLAM PRO EXtrahendis radicibus construere.

Primo ante oculos nobis ponamus prop. 4. secundi Euclid. quæ sic habet.

Quando numerus in duas partes vtcumq; diuiditur, erunt partium quadrata, vna cum duobus partium rectangulis, æqualia quadrato totius.



Vt si numerus 12 diuidatur in 10 & 2, erit quadratum maioris partis 100, minoris 4, quod ex 10 in 2 fit rectangulum bis acceptum, 40; sed 100, 4, & 40 faciunt 144, quantum etiam facit quadratum totius lineæ a b, seu 12. In schemate adiecto, linea a b in c est vtcumque diuisa: quadratum partis a c est spatium A; partes b c, spatium B, rectangula

gula sub partibus ac, cb contenta, sunt C & D: at hæc quatuor A, B, C, D æquantur totius lineæ ab spatio. Vocetur pars ac, A: cb, B: & sit A + B tota linea (signum hoc + significat plus) totum quadratum ad est Aq + A 2 in B + Bq: nam Aq significat spatium A; A 2 in B significat spatia C, D: Bq, spatium B. Fit autem hæc formula Aq + A 2 in B + Bq, ex ductu A + B in se. Nam A in A facit Aq: A in B, facit A in B semel. Rursus B in A facit A in B semel. Denique B in B facit Bq. Quando enim ducitur A in A, aut B in B, mutatur character minor in proximè maiorẽ, vq in ce: ce in qq, &c. Quãdo verò ducitur A in B; aut B in A character non mutatur, sed ex vtroq; fit A in B. Ergo hæ duæ formulæ coniunctæ, faciunt Aq + A 2 in B + Bq. Cũ .n. A in B bis sit positũ, debent ad A apponi 2, hoc modo, A 2 in B.

A + B
A + B
―――――――
Aq + A in B
      A in B + Bq
―――――――――――
Aq + A 2 in B + Bq

Aq + A in B
      A in B + Bq.

1. A in B.
2. Aq + A 2 in B + Bq.
3. Ace + Aq 3 in B + A 3 in Bq + Bce.
4. Aqq + Ace 4 in B + Aq 6 in Bq + A 4 in Bce + Bqq.
5. Aß + Aqq 5 in B + Ace 10 in Bq + Aq 10 in Bce + A 5 in Bqq + Bß.
6. Aqce + Aß 6 in B + Aqq 15 in Bq + Ace 20 in Bce + Aq 15 in Bqq + A 6 in Bß + Bqce.
7. Aß 6 + Aqce 7 in B + Aß 21 in Bq + Aqq 35 in Bce + Ace 35 in Bqq + Aq 21 in Bß + A 7 in Bqce + Bß 6.

Pro tertia formula, quæ est pro radice cubica, duc

A q + A 2 in B + B q, in A + B hoc modo. Ex A in A q, fit A ce: ex A in A 2 in B, fit, A q 2 in B: Ex A in B q, fit A in B q. Item, ex B in A q, fit A q in B: ex B in A 2 in B, fit A 2 in B q: ex B in B q, fit B ce. Formulæ duabus lineis inclusæ, faciunt A ce + A q 3 in B + A 3 in B q + B ce. Vt in apposita formula apparet. Nam A q 2 in B, & A q in B faciunt A q 3 in B: & A in B q, cum A 2 in B q, facit A 3 in B q. Eodem modo constructæ sunt reliquæ formulæ. Nam quarta facta est ex ductu tertiæ in A + B: quinta ex ductu quartæ in A + B, & C.

```
A q + A 2 in B + B q
A + B
-----------------------------------
A ce + A q 2 in B + A in B q
       A q in B + A 2 in B q + B ce
-----------------------------------
A ce + A q 3 in B + A 3 in B q + B ce
```

Articulus II.

Omnis generis radices extrahere.

Vt facilius radices extrahantur, notentur hæc. Primò sub numero primo versus dextram, ponẽdum esse punctum. Deinde in extractione radicis quadratæ, vno prætermisso, sub tertio, quinto, septimo, &c. In extractione cubicæ, duobus prætermissis, sub quarto, septimo, decimo, &c. In biquadratæ, tribus prætermissis sub quinto, nono, decimotertio, &c.

Secundò, in formulis supra positis, primum A cum suo charactere, tantum in primo quoto vsurpari; pro reliquis nullam amplius eius rationem haberi.

Ter-

Tertiò. Quotum inuentum, siue vnam, siue plures habuerit figuras, vocari A, inueniendum B.

Quartò, pro noui diuisoris inuentione, inuentum quotum esse multiplicandum, vt character, & numerus post A positi, indicant.

His notatis extrahemus ex hoc numero 4692798016 radicem quadratã, hac vsi formula Aq + A 2 in B + Bq. Notatis itaque punctis, video in secunda columna tabulæ radicum, & graduum, quis numerus quadrat⁹ proxime minor sit numero vltimi membri versus sinistram, nimirum numero hoc 46, inuenioq́ue 36, cuius radicem 6 pono post lunulam; & 10, quæ subtractis 36 ex 46, restãt scribo supra 46, vt in prima apparet operatione. Pro alio diuisore, cum in formula habeam + A 2,

Operatio 1.

10
~~46~~92798016 (A 6
12

Operatio 2.

~~10~~68
~~4692~~798016 (AB 68
~~12~~36
1

duco quotum 6 A, in 2, & habeo nouum diuisorem 12. Cuius priorem figuram 2 pono post quartum punctum, nempe sub 9, alteram deinceps sinistrorsum, & video quoties 1 in 10 contineatur: continetur sæpius, quam octies, possum tamen propter sequentem quoti figurã non nisi 8 accipere. Et quia habeo in formula A 2 in B, duco duplum quoti 6 A, in 8 B, quotum iam inuẽtum, & produco 96. Rursus quia in formula habeo + Bq, addo quadratum quoti 8 B, nempe 64, ad 96, hoc modo, & conflo 1024 quibus ex 1092 subtractis restant 68, vt in secunda o-

96
64
1024

peratione apparet: Pro tertio diuiſore, cum habeam in formula A 2, duco totum quotũ 68 A in 2, & produco 136, diuiſorem nouum, cuius figura prima poſt tertium punctum, nempe ſub 7 poſita, & reliquis deinceps, vt in ſecunda vides operat. video quoties 1 in 6 contineatur, continetur quinquies.

Repono 5 ad quotum: Et, quia habeo in formula, A 2 in B, duco 5 B, in diuiſorẽ 136, & produco 680, quibus addo quadratũ quoti 5 B, quod habeat formula + B q, hoc modo, ſummam 6825 ſubtraho ex 6879, & reſtant 54, vt in tertia operatione cernis.

Operatio 3.

$\cancel{1}\cancel{0}\cancel{6}\cancel{8}54$

$\cancel{4}\cancel{6}\cancel{9}\cancel{2}\cancel{7}\cancel{9}8016$ (A | B : 68 | 5

$\cancel{1}\cancel{2}\cancel{3}\cancel{6}70$

$\cancel{1}13$

$$\begin{array}{r} 680 \\ 25 \\ \hline 6825 \end{array}$$

Pro alio diuiſore duplico totum quotum hactenus inuentum, nimirum 685, & inuenio 1370, vt in tertia apparet operatione, collocatoq́; o ſub 8 poſt ſecundum punctum, & reliquis figuris deinceps ſiniſtrorſum, video nihil accipi poſſe: pono ergo ad quotum o, & paro nouum diuiſorem, vt prius, qui erit 13700. Hoc diuiſore collocato, vt in quarta operatione apparet, video quoties 1 in 5 contineatur, cõtinetur quater: poſitis igitur 4 ad quotum, duco totum diuiſorẽ in 4 B, & produco 54800, quibus

5
7 7
5

Operatio 4

$\cancel{1}\cancel{0}\cancel{6}\cancel{8}\cancel{5}\cancel{4}$

$\cancel{4}\cancel{6}\cancel{9}\cancel{2}\cancel{7}\cancel{9}\cancel{8}\cancel{0}\cancel{1}\cancel{6}$ (A | B : 6850 | 4

$\cancel{1}\cancel{2}\cancel{3}\cancel{6}\cancel{7}\cancel{0}00$

$\cancel{1}\cancel{1}\cancel{3}37$

1

addo quadratum quoti 4 B, hoc modo summam 548016 subtraho ex 548016, & restat nihil, vt in quarta operat. apparet.

54800
16
548016

Vulgari modo sic extraho radicem quadratam.

Operatio 1.

2
~~1~~~~0~~
~~46~~9279 8016(68
~~1~~28

Noto puncta, vt prius, & video quis numerus quadratus sit proxime minor numero vltimi membri 46, & video 36: pono ergo eius radicem 6 ad quotum, vt supra.

Operatio 2.

1
~~2~~
~~1~~~~0~~3
~~469~~2798016(68
~~1~~28

Deinde duplum quoti nempe 12 assumo pro nouo diuisore quem pono, vt prima habet operatio, & video quoties 1 in 10 contineatur, continetur octies: 8 ergo pono, & ad quotum, & ante diuisorem 12 sub 2, & dico octies 2 sunt 16, quibus ex 29 subtractis, restant 13; vt in secunda apparet operat. Dico iterum octies 8 sunt 64, quibus ex 132 subtractis, restant 68, vt tertia habet operatio. Pro nouo diuisore assumo duplũ quoti 68, quod est 136, quem pono, vt tertia habet operatio, & video quoties 1 in 6 contineatur, continetur quinquies: 5 ergo & ad quotum, & ante diuisorem 136 sub 9 pono, vt in tertia

Operat. 3.

~~1~~
~~2~~6
~~0~~~~3~~8
~~4692~~798016(685
~~128~~65
13

tia operatione, & progredior per omnia, vt hactenus, &c.

Secundum exemplum radicis cubicæ ſit hoc. Volo ex numero hoc 1010644583 12 extrahere radicem cubicam. Notatis punctis video in tabula radicum, quis cubus ſit proxime minor numero vltimi membri 101, & video eſſe cubum 64, cuius radicem 4 pono poſt lunulam, & ſubtractis 64 ex 101. reſiduum 37, pono ſupra 101, vt in prima operat. apparet. Diuiſorem iam paro hoc modo. In formula habeo + A q 3: quadratũ ergo quoti 4 A, iam inuenti, duco in 3, & produco 48. Præterea in formula habeo + A 3: ergo quotum 4 A duco in 3, & produco 12. Hos itaq; duos numeros 48, & 12, ſic addo

48
12
———
492

& conflo 492, diuiſorem, cuius figuram 2 pono ante punctum tertium ſub 6, reliquas deinceps ſiniſtrorſum, vt in prima apparet operat. & video quoties 4 in 37 contineantur: continentur propter ſequentes figuras, tantum ſexies: pono ergo 6 ad quotum: & quia in formula habeo + A q 3 in B, duco 6 B, quotum in triplum quadrati quoti 4 A, nempe in 48, & produco 288. Rurſus quia in formula habeo + A 3 in B q, duco triplum quoti 4 A, nempe 12 in quadratum quoti 6 B, nempe in 36, & produco

Operatio 1.

37
~~1~~~~0~~~~1~~064458312 (A 4
492

Operatio 2.

3
~~3~~~~7~~728
~~1~~~~0~~~~1~~~~0~~~~6~~~~4~~~~4~~58312 (AB 46
~~4~~~~9~~~~2~~618
63

duco 432. Deniq; quia in formula habeo + B ce, accipio 6 B, quoti cubum 216: atque hos tres numeros vt hic apparet, addo, & conflo 33336 quibus ex 37064 subtractis, restant 3728, vt in secunda operat. apparet. Paro iterum nouum diuisorem, hoc modo. In formula habeo + A q 3, quadratũ ergo totius quoti hactenus inuenti 46 A, duco in 3. Duco quoq; 46 A quotũ in 3, quod in formula habeam + A 3, & produco hos numeros 6348, 138 quos

288
432
216
33336

sic addo

6348
138
63618

& conflo 63618, diuisorem nouum, quem colloco, vt secunda monstrat operatio, hoc est, pono figuram primam 8 post secundum punctum sub 5, & reliquas deinceps. Qua collocatione facta, video quoties 6 in 37 contineantur: continentur propter sequentis diuisoris figuras, tantum quinquies: pono ergo 5 ad quotum, qui est quotus 5 B. Et quia in formula habeo + A q 3 in B, & + A 3 in B q, & B ce, duco A q 3, hoc est 6348 in 5: 138 in 25, & produco 31740 & 3450, quos numeros, & cubum ipsius 5 B quoti noui addo, hoc modo

Operatione 3.

$\cancel{3}519$
$\cancel{3}\cancel{7}\cancel{7}\cancel{2}\cancel{8}833$
$\cancel{1}\cancel{0}\cancel{1}\cancel{0}\cancel{6}\cancel{4}\cancel{4}\cancel{5}\cancel{8}316$ (A 64 | B 5
$\cancel{4}\cancel{9}\cancel{2}\cancel{6}\cancel{1}\cancel{8}145$
$\cancel{6}\cancel{3}488$
6

31740
3450
125
3208625

& conflo 3208625, quibus ex 3728458 subtractis, restant 519833, vt in tertia operat. apparet. Denique pro vltimo diuisore duco quadratum totius quoti 465 A, hactenus inuenti

 uenti

uenti in 3, quod in formula habeam A q 3; Eundem quotum duco in 3, quod in formula habeam + A 3, & produco hos numeros 648675, 1396, quibus sic additis conflo 6488145, diuisorem nouum, quo collocato, vt in tertia operatione cernis, video quoties 6 in 51 contineantur; continentur octies: erit igitur 8 quotus B, quem si duxero in 648675, & eius quadratum in 1395, produco 5189400, & 89280: quos numeros, & quoti 8 B cubum, si addidero hoc modo conflabo 519833312, quo numero ex residuo 519833312 subtracto, restat nihil. Radix ergo cubica numeri propositi 1106445 8312, est 4658.

648675
1395
6488145

5189400
89280
512
519833312

Operat. 4.

3 3 1 9
3 7 7 2 8 8 3 3
1 0 1 0 6 4 4 5 8 3 1 2 (A 465 | B 8 5
4 9 2 6 1 8 1 4 5
6 3 4 8 8
6

Exemplum tertium radicis supersolidi primi, sit hoc, 1099511627776. Notatis punctis, video in tabula radicum, quod supersolidum primum proximè minus sit numero vltimi membri 109, & reperio 32, cuius radicem 2, pono ad quotum, & subtraho 32 ex 109,

Operatio 1.

77
1 0 9 9 5 1 1 6 2 7 7 7 6 (A 2 | B 5
88410

atque

atque residuum 77, pono supra 109, vt in prima operatione apparet. Pro primo diuisore accipio formulam quintam, in qua habeo + A qq 5: quotum ergo 2 A, duco ad biquadratum, quod est 16, quo ducto in 5 fiunt 80. Secundò habeo + A ce 10; ducto ergo cubo ipsius 2 A, scilicet 8 in 10, produco 80. Tertiò habeo + A q 10: ergo quadratum ipsius 2 A duco in 10, & produco 40. Quartò habeo A 5; ducto 2 A in 5 produco 10. Hos igitur quatuor numer. 80. 80. 40. 10, addo hoc modo, & conflo 88410, diuisorem primum, eius primam figuram 0, pono proxime post secundum punctum, nempe sub 1, & reliquas sinistrorsum deinceps, & video quoties 8 in 77 habeantur, habita ratione sequentiũ figurarũ, habentur quinquies: ergo 5 ad quotũ positis, duco primo 5 in 80, nimirum in biquadrati quoti 2 A quintuplũ, eo quod formula habeat A q q 5 in B, & produco 400. Secundò, duco quadratum quoti 5 B in decuplum cubi quoti 2 A, scilicet 25 in 80, quod formula habeat A ce 10 in B q & produco 2000. Tertiò, duco cubũ quoti 5 B, in decuplum quadrati quoti 2 A, nempe 125 in 40, quod formula habeat A q 10 in B ce. & produco 5000, Quartò, duco biquadratum quoti 5 B in quintuplum quoti 2 A, quod formula habeat A 5 in B q q, & produco 6250. Quintò, cum in formula habeam Bß, addo his numeris 400. 2000. 5000. 6250 supersolidum primũ ipsius 5 B, quoti, nempe 3125, hoc modo, & produco 6565625, quibus ex 7795116 subtractis, restant 1229491. Tertium quotum 6 reperies, si cum inuento quoto 25 A, progressus fueris, vt ante factum est.

80
80
40
10
88410

400
2000
5000
6250
3125
6565625

Primò

Operat. 2.

4
7 × 7
4

12
$\cancel{7}\cancel{7}$29491
$\cancel{1}\cancel{0}\cancel{9}\cancel{9}\cancel{8}\cancel{1}\cancel{1}\cancel{6}$27776 (A 25 | B 6
88401

Primò, notabis radicē biquadratam facilius exrahi, si bis quadrata extrahatur. Primò ex numero proposito: iterum ex radice inuenta. Item quadrati cubicam extrahes si primùm quadratā; deinde ex radice inuenta cubicā extraxeris. Atq; vniuersī si radices illas extrahas, quas characteres ostendunt, erit radix extrahenda inuenta.

Secundò, ex fractis extrahuntur radices, si tam ex denominatoribus, quam ex numeratoribus extrahantur. Ita radix quadrata huius fractionis $\frac{9}{25}$, est $\frac{3}{5}$, cubica huius $\frac{8}{27}$, est $\frac{2}{3}$.

Tertiò, quando facta extractione, quod plerumque accidit, residua fuerint, præfige numero, ex quo radix extrahenda est, si quidem radicem quadratam extracturus es, duas, quatuor, sex, &c. cyphras; si cubicam, tres, sex, nouem, &c. Si supersolidam primam, quinque, decem, quindecim, &c. Sit igitur ex hoc numero 474 radix quadrata extrahēda. Præfigo illi quatuor cyphras hoc modo, 4740000, cuius numeri radix quadrata est 2177; sed quia numeri 474 radix proxima est 21, abijcio 77 ex 2177, iisq; suppono 100, hoc modo $21\frac{77}{100}$. Centum autem ideo suppono, quod quatuor cyphræ numero 474 fuerint adiectæ.

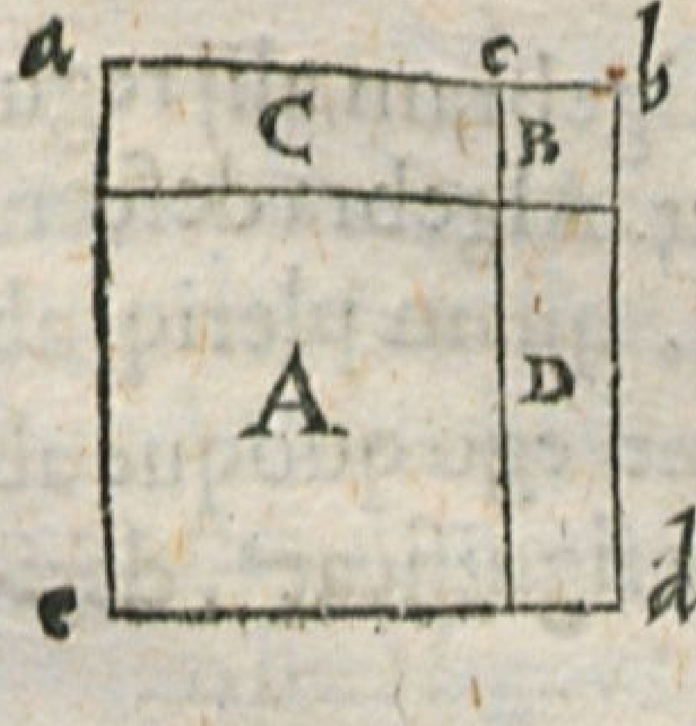
Examen.

Fit examen in omnibus eodem ferè modo, quo in diuisiouisione. Abiiciuntur enim ex quoto, quoties fieri potest, 9: quod restat ponitur & in superiore, & in inferiore parte crucis; Et, si fuerit extracta radix quadrata, in se quadratè ducitur: si cubica, cubicè: si supersolida supersolidè, &c. Et ex producto, residuoque extractionis, si quod fuerit, abiiciuntur rursus 9, quoties fieri potest; & si quod, facta abiectione, restat, æquale fuerit residuo numeri, ex quo facta est extractio, probabile est operationem bonam esse: si æquale non fuerit, certum est erratum esse. Optima probatio est, si quotus in se quadratè, cubicè, biquadratè, &c. multiplicetur, prout radix cubica, quadrata, biquadrata, &c. extracta fuerit, & producto residuum, si quod fuerit, addatur. Si enim extremum hoc productum æquale fuerit numero, ex quo facta est extractio, bona est operatio.

ANNOTATIO.

Possunt plures radices simul extrahi; sed curam hanc alijs relinquimus, cum ad nostrum institutum parum faciat. Non differt re, sed modo tantum ratio extrahendarum radicum à nobis proposita, à vulgari. Est tamen meo iudicio facilior, magis expedita, & memoriæ iuuandæ accõmodatior.

Demonstratio extractionum.



Cum quadratum a b d e, componatur ex duobus quadratis A, B, & duobus rectangulis C, D, manifestũ est, cur a c quotus inuẽtus pro nouo diuisore duplicãdus sit in extractione radicis quadratæ; nimirũ propter duo rectangula C, D. Quod vero

vero in extractione radicis cubicæ, tam quadratū quoti inuenti, quam ipsemet quotus sit triplicandus, hinc cōstat. Quia si super quadratum a b d e erigatur cubus, erit ille compositus ex duobus cubis, quorum latera sunt segmenta, a c, c b; & ex sex prismatis, quorum tria pro basi habent quadratum segmenti a c, altitudinem segmentum c b. Reliqua tria pro basi habent quadratum segmenti c b; altitudinem segmentum ac. Vnde in forma cubi habetur $A\,c + A\,q\,3$ in $B + A\,3$ in $B\,q + B\,c$. Sequētium radicum extractiones ex compositione formularum satis manifestæ sunt. Vt enim ex $A + B$ in $A\,q + A\,2$ in $B + B\,q$ fit formula cubi: ita ex eodem $A + B$ in cubi formulā, fit formula biquadrati; & ex hac in idem $A + B$, fit formula supersolidi primi &c.

INSTITVTIONVM ARITHMETICARVM

Liber Secundus.

DE NVMERO RATIONALI COSSICO.

HAnc Arithmeticæ partem, alij Algebram, alij regulam Coss, alij quadraturā vocant. Algebra descendit ab radice גָּבַר, vt opinor. Cossa, quam pleriq; ab Italica voce Cosa descendere autumant, ego quoque ab radice Hebraica כָּסַס, quæ supputare significat, deriuari credo.

Hæc

Hæc nobilis Arithmetica tres habet partes. Inuentionem æquationis, Reductionem, & Resolutionem, licet non omnes ad omnium quæstionum solutionẽ concurrant. Dicuntur numeri coſſici, etiam denominati, quod à certis characteribus denominẽtur, vt dignosci inter se possint. Characteres sunt N. ℞, q, ce, q q, ß, &c, ijdẽ omnino, qui supra in radicum tabula positi sunt. Character primus significat numerum absolutum. Secundus radicem. Tertius quadratum. Quartus cubum. Quintus biquadratum. Sextus supersolidum primum. Quidam pro ℞ ponunt literam L, quæ latus significat, alij R. Pro q ponunt quidam ♉, & quadratum vocant zensum; quadraticubum zensicubum; biquadratum zensizensum. Ponuntur hi characteres post numeros, hoc modo 2℞, 2 q, 2 q, 2 ce, 2 q q, 2 ß. Primus significat duas radices; Secundus duo quadrata; tertius duos cubos; quartus duo biquadrata; quintus duos supersolidos primos. Vt autem ordine procedamus, Primo trademus elementa, & radicum extractionem. Secundo tres partes regulæ explicabimus. Tertiò, vsum dabimus, & praxim; omnia summa, qua possumus, breuitate.

Capvt I.

DE ELEMENTIS NVMErorum coßicorum.

Notetur alios numeros coſſicos esse simplices, alios compositos, & diminutos. Simplices sunt, qui nullo connectuntur signo. Compositi, qui hoc signo + connectuntur, diminuti, qui hoc — disiunguntur; significat enim hoc signum + plus, hoc — minus.

Arti-

ARTICVLVS I.

DE SIMPLICIVM COSsicorum Additione, & Subtractione.

Simplicium Additio, & Subtractio, si eosdem habeant characteres, eodem fiunt modo, quo absolutorum. Vt si 8 ꝝ, & 10 ꝝ addantur fient 18 ꝝ. Si 8 ꝝ. ex 18 ꝝ subtrahãtur, restabunt 10 ꝝ. Si diuersos habeant characteres addũtur per signũ +, Subtrahuntur per —. Vt si 6, 8 ꝝ, 10 q, & 3 ce addenda forent, fieret hæc summa 6 + 8 ꝝ + 10 q + 3 ce. Si vero 6 ex 8 ꝝ essent subtrahenda, relinquerentur 8 ꝝ — 6. Si 10 q, ex 3 ce relinquerentur 3 ce — 10 q.

ARTICVLVS II.

DE MVLTIPLICATIOne, & diuisione coßicorum simplicium.

Quod ad numeros attinet, fiunt multiplicationes, & diuisiones eo modo, quo absolutorum. In characteribus autem fit mutatio. Ac primo quidem si cossicus per absolutum multiplicetur, aut diuidatur, manet idem character. Vt si 8 ꝝ per 4 multiplicentur, fient 32 ꝝ. Si 10 q per 5, fient 50 q. Si 6 ce per 8, fient 48 ce. Si verò 32 ꝝ per 4 diuidantur, prouenient 8 ꝝ. Si 50 q

per

per 5, prouenient 10 q. Si 48 ce per 8, prouenient 6 ce.

Si coſſici per coſſicos multiplicentur, adduntur eorum exponentes (exponentes voco numeros ſupra characteres in ſubiecta tabella deſcriptos) & character ſummæ exponentiũ additur producto. Vt ſi ducantur 4 ℨ

0	1	2	3	4	3	6	7
N	ℨ	q	ce	qq	ß	qce	ßb
8	9	10	11	12	13	14	15
qqq	cece	qß	ßc	qqce	ßd	qßb	ceß
16	17	18	19	20			
qqqq	ße	qcece	ßf	qqß			

in 3 q, fient 12 ce: nam cum characterum ℨ: & q exponentes ſint 1 & 2, eorumque ſumma 3 ſub ſe habeat characterem ce, fit vt producto 12, apponendus ſit character ce. Eodem modo, ſi 6 q ducantur in 10 ce, producentur 60 ß; ſi 2 ß in 8 qce, fient 16 ßc, &c.

In diuiſione aduerte, quos characteres gerant diuidendus & diuiſor: eorum exponentes ſume; minorem à maiore ſubtrahe, eritque reſiduum exponens characteris quoto adſcribendi. Vt ſi diuidantur 36 ce per 4 ℨ, prouenient 9 q. Si 20 ce per 5 q, prouenient 4 ℨ. Si 40 qq per 5 q, prouenient 8 q. Si occurrat diuiſor maiore affectus charactere, quam diuidendus, fiet diuiſio per lineam interiectam. Vt ſi ſint 8 q per 3 ce diuidenda, fiat id hoc modo, $\frac{8\,q}{3\,ℨ}$.

Articvlvs III.

De additione, et subtractione compositorum, & diminutorum.

Si diligenter ad signa +, —; & ad duo præcepta attendas, facile quosuis numeros addes, & quemlibet à quolibet subtrahes: nam etiam maiores â minoribus in hac pragmatia subtrahi possunt, quod quando fit, residuum est minus quam nihil. Præcepta hæc sunt.

Primum. *Eadem signa idem signum ponunt, nisi in subtractione, quando præposterè ponuntur, tum enim subtrahitur, superior ab inferiore, & ex + fit —; & ex — fit +.*

Secundum. *Diuersa signa mutant speciem operationis. & in additione ponitur signum maioris numeri; in subtractione verò superioris, à quo fit subtractio, siue maior is sit, siue minor, siue æqualis.*

Exemplum additionis. Incipimus à sinistra, quanquam & à dextra possemus, & dicimus 4 & 7 faciunt 11, quibus additur character

4 qce + 3 ß + 8 ce + 10 q — 12 ꝛe — 20
7 qce — 6 ß — 4 ce + 12 q — 7 ꝛe + 16
11 qce — 3 ß + 4 ce + 22 q — 19 ꝛe — 4

qce, quem 4 & 7 habent.

Quando + 3 ß & — 6 ß adduntur, fiunt — 3 ß; quia cũ habeãt diuersa signa, pro additione fit subtractio, & retinetur signũ maioris numeri iuxta secundum præceptũ. Idem factũ vides in additione + 8 ce, & — 4 ce, fiunt .n. + 4 ce. Item in additione — 20, & + 16; fiunt .n. — 4.

Exemplum ſubtractionis. Subtractis 3 q ce ex 8 q ce, reſtant 5 q ce. Subtractis verò + 5 ß ex — 2 ß, reſtãt — 7 ß: quia hic

8 q ce — 2 ß + 3 ce + 4 q — 10 ℞ — 12 + 9
3 q ce + 5 ß + 9 ce — 6 q — 15 ℞ + 7 + 6 ℞
5 q ce — 7 ß — 6 ce + 10 q + 5 ℞ — 19 — 6 ℞

pro ſubtractione, fit Additio, & retinetur ſignum ſuperioris. Idem fit quando ſubtrahuntur — 6 q ex + 4 q, reſtant enim + 10 q. Item quando + 7 ex — 12 ſubtrahuntur, reſtant n. — 19. Quãdo verò + 9 ce ex + 3 ce ſubtrahũtur, reſtant — 6 ce; quia hic numeri præpoſtere ponuntur, maior infra, minor ſupra quod qñ fit, ſubtrahitur ſuperior ab inferiore, & ex + fit —. Idem accidit, qñ — 15 ℞ ex — 10 ℞ ſubtrahuntur, ſubtrahitur enim ſuperior ab inferiore, & ex — fit +, ſecundum regulam primam. Quando + 6 ℞ ſubtrahuntur ex 0, ſiue nihilo, reſtant — 6 ℞. Si 6 ℞ haberent ſignum —, reſtarent + 6 ℞.

ARTICVLVS IIII.

DE MVLTIPLICATIONE, & diuiſione compoſitorum & diminutorum.

Quod ad characteres attinet, eadem regula ſeruatur, quæ de ſimplicibus tradita eſt. De ſignis verò + & —, hæc datur regula.

Eadem ſigna ponunt ſignum +; diuerſa —.

Sint 6 q q — 5 ce + 4 q + 10 ℞ — 20, per 10 q + 8 ℞ — 12 multiplicanda. Procedo ſecundum regulas, vt ſubiecta habet formula.

6qq — 5ce + 4q + 10℞ — 20
10q + 8℞ — 12

60q℞ — 50ß + 40qq + 100ce — 200q
+ 48ß — 40qq + 32ce + 80q — 160℞
— 72qq + 60ce — 48q — 120℞ + 240

60qce — 2ß — 72qq + 192ce — 168q — 280℞ + 240.

In omnes ſuperiores ducuntur primo 10q. Secundò 8℞. tertio — 12. Ductis igitur 10q in 6qq, fiunt 60 qce: in — 5ce, fiunt — 50ß in + 4q, fiunt + 40qq: in 10℞, fiunt + 100ce: ac deniq; in — 20, fiunt — 200q. Secundò, ductis + 8℞ in 6qq, fiunt 48ß: in — 5ce, fiunt — 40qq: in + 4q, fiunt + 32ce: in + 10℞, fiunt + 80q: ac denique in — 20, fiunt — 160℞. Tertiò, ductis — 12 in 6qq. fiunt — 72qq: in — 5ce, fiũt + 60ce: in + 4q, fiunt — 48q: in + 10ce. fiunt — 120℞: & poſtremo in — 20, fiunt + 240. Additio numerorum inter duas lineas incluſorum, fit ſecundum præcepta Additionis compoſitorum, & diminutorum, hoc nota diligenter quod quando alter multiplicantium habet +, alter —, productum ſemper habere — quando vero vterque habet +, aut — productum, ſemper habere +, iuxta regulam traditam.

Diuiſio, cum non niſi in exemplis arte factis, locum habeat, eam nos aliter non abſoluemus, quam linea inter diuidendum, & diuiſorem interiecta in morem fractorum. Vt ſi 8q + 10℞. per 2℞ — 20 ſint diuidenda; ita eos collocabimus $\frac{8q + 10℞}{2℞ \cdot 20}$.

ANNOTATIO.

De fractis numeris pauca præcipio, cum difficultatis nihil habeant, ſi quis in abſolutorum fractorum calculo probè ſit verſa-

versatur. Nam primo ad eandem denominationem reducuntur, vt absoluti. Sint enim hæ fractiones $\frac{4ze+20}{1ze+5}$, $\frac{3q-50ze}{12}$ *ad eandem denominationem reducendæ. Pro Denominatore nouo duco in se denominatores reducendos, & produco* 12ze+60. *Pro numeratoribus nouis duco per crucē* 4ze+20 *in* 12: & 3q−50ze *in* ze+5, & *produco* 48ze+240, *atq;* 3ce+5q−50ze *quibus suppono communem Denominatorem, hoc modo* $\frac{48ze+240}{12ze+60}$, $\frac{3ce+5q-50ze}{12ze+60}$.

Secundo, sint eædem fractiones addendæ, reduco primò eas ad eandem denominationem; deinde Numeratores reductos addo, & conflo 3ce+5q−2ze+240; *his suppono cōmunem denominatorem hoc modo* $\frac{3ce+5q-2ze+240}{12ze+60}$.

Tertiò, sit hæc fractio $\frac{4ze+20}{1ze+5}$ *ex hac* $\frac{3q\ 10ze}{12}$ *subtrahenda. Reductum hunc Numeratorem* 48ze+240, *subtraho ex hoc reducto* 3ce+5q−50ze *hac methodo,*

3ce+5q−50ze+0 quo facto, ſuppono reſiduo cō-
+48ze−240 munem Denominatorem, ſic
3ce+5q−98ze+240 $\frac{3ce+5q-98ze-240}{12ze+60}$.

Quartò, si eædem fractiones inter se sint multiplicandæ, duco tam superiores, quam inferiores in se, & produco $\frac{12ce-20q-200ze}{12ze+60}$. *Si vna per alteram sit diuidenda, inuerto Diuisorem, ducoq; tam superiores, quam inferiores in se, producoq;* $\frac{3ce+5q\ 50ze}{48ze+240}$. *Contingit non raro, vt integra fractis reperiantur æqualia, aut integris fracta sint addenda, vel ab illis subtrahenda. Quod quando contingit, supponatur integris vnitas, & fiant reliqua, vt iam est dictum. Exemplum. Sit hæc fractio* $\frac{8q+5ze-10}{2ze+4}$ *æqualis inuenta huic numero* 24: *aut illi sit addenda; aut ab illo subtrahenda. Suppono integro vnitatem hoc modo,* $\frac{24}{1}$, $\frac{8q+5ze-10}{2ze+4}$. *Pro communi denominatore duco inferiores in se, & produco* 2ze+4: *pro Numeratoribus verò duco per crucem* 24 *in* 2ze+4: &

8q+5℞−10, in 1, producoq́; 48℞+96, & 8q+5℞−10 quibus aut ſuppono cõmunem Denominatorẽ hoc modo $\frac{48℞+96}{2℞+4}$, $\frac{8q+5℞-10}{2℞+4}$; aut 48℞+96, & 8q+5℞−10 addo, & conflo $\frac{8q+53℞+86}{2℞+4}$: aut 8q+5℞−10, ex 48℞+96 ſubtraho, & reſtãt $\frac{43℞+106\ 8q}{2℞+4}$.

ARTICVLVS V.

DE RADICVM EXtractione.

Ex ſimplicibus coſſicis radix non aliter extrahitur, atque ex abſolutis. Quando autẽ quadrata, cubica, aliáue radix extrahenda ſit, character indicat. Ita radix quadrata huius 25 q, eſt 5: cubica huius 27 ce, eſt 3, &c.

Ex cõpoſitis verò, & diminutis, tunc tantum hactenus vſitata methodo radices extrahi poſſunt, quando exponentes, ſeruant progreſſionem Arithmeticam, hoc eſt, quando characteres duorum extremorũ à medio æqualiter diſtãt cuiuſmodi ſunt N°. 1 ℞. q 2: & N°. q 2. qq 4: & N°. ce 3. qce 6: & N°. qq 4. qqq 8, &c. Si minimus exponens non ſit o, ſed numerus; erunt characteres abbreuandi, hoc eſt, minimus exponens erit tum à ſe, tum ab alijs exponẽtibus ſubtrahendus, & reſiduorũ characteres aſſumendi. Vt ſi ſint ce 3. ß 5. ßb 7; ſubtrahenda ſunt 3 ex 3. 5 & 7, vt reſtent o. 2. 4; quorum characteres ſunt N. q qq. Nos characterem N omittimus, eoq́; numerum abſolutè poſitum affectum intelligimus.

His expoſitis hac arte radices ex compoſitis, & diminutis extrahuntur.

Primò. Per numerum maximo charactere affectum diuidantur reliqui duo; semper enim in hanc extractionem tres tantum numeri concurrunt.

Secundò. Diuisione facta, ad quadratum semissis numeri radicum, additur, aut ab illo subtrahitur, absolutus prout signo +, vel —, affectus fuerit.

Tertiò, ex hoc aggregato, vel relicto, extrahitur radix quadrata; cui additur, aut ab illa subtrahitur, semissis numeri radicum, prout radicum numerus signo +, vel —, fuerit affectus.

Notabis in huiusmodi extractionibus, quando numerus absolutus notatur signo —, semper esse duas radices, maiorem, & minorem, illa habetur, si radici inuentæ addatur semissis dictus; hæc si ex semisse radix subtrahatur. Intelligo per numerum radicum, illum cuius exponens medius est trium numerorum illorum, qualemcunq; characterem gerat. Numeri autem ad extractionem dispositi sic sunt.

1 q. 20 ℞ — 91. exponentes. 2. 1. 0.
1 q. 187 — 6 ℞. exponentes. 2. 0. 1.
1 q. 187 + 6 ℞. exponentes. 2. 0. 1.
3 q. 54 ℞ — 216. exponentes. 2. 1. 0. diuisis per 3 q. p-
1 q. 4 ℞ + 60. exponentes. 2. 1. 0. (ueniūt 18 ℞ — 72
1 qq. 26741 — 100 q. exponentes. 4. 0. 2. (ueniūt 30 q + 216
2 qq. 60 q + 432. exponentes. 4. 2. 0. diuisis per 2 qq. p-
1 ß b. 9 ß + 112 ce. exponentes. 7. 5. 3. vel. 4. 2. 0.

Ex quib⁹, vt radices extrahantur diuidātur duo postremi numeri per primū, vt factū vides in quarto & 7. exēplis: nā in reliquis, cū vbiq; primus numerus sit vnitas diuisione nulla opus est. Diuisione facta, extrahātur radices, ac primo ex 20 ℞ — 91. Semissis numeri radicū est 10, eius quadratum 100, ex quo ſublato abſoluto 91, propter ſignum —, reſtant 9; ad cuius radicem quadratam 3, additus ſemiſſis, facit 13; quæ eſt radix maior; minor habetur, ſi radix 3 ex ſemiſſe 10 ſubtrahatur, relinquuntur enim 7. Hæ duæ radices in ſe ductæ, procreant numerum abſolutum 91.

In ſecundo exemplo 187 — 6 ꝶ, additus abſolutus ad quadratum ſemiſſis numeri radicum, propter ſignum +, facit 196. A cuius radice quadrata 14, ſi ſubtrahatur ſemiſſis 3, propter ſignum —, reſtant 11, æſtimatio, ſeu valor vnius 1 ꝶ.

In quarto exemplo, facta diuiſione per 3, reſtat extrahenda radix ex 18 ꝶ — 72. Ex quadrato ſemiſſis numeri radicum, quod eſt 81, ſubtractus abſolutus propter ſignum —, relinquit 9, cuius radix 3 addita, & ſubtracta ſemiſſi, parit valores 12, & 6, qui numeri in ſe ducti creant abſolutum 72.

In ſexto exemplo, 26741 — 100q. Ad quadratum ſemiſſis numeri radicum 2500, additus abſolutus, facit 29241; ex cuius radice quadrata 171, ſubtractus ſemiſſis 50, relinquit 121; cuius numeri quadratum cum centuplo ſui, parit numerum abſolutnm. Sed nota numerum 121 habere aliam radicem quadratam, quod numerus radicum gerat characterem q. Radix autem illa eſt 11, Huius numeri vnum biquadratum, & 100 quadrata, faciunt numerum abſolutum.

In vltimo exemplo 9 ß + 112 ce, ſiue (abbreuiatis characteribus) 9 q + 112, ſemiſſis numeri radicum eſt $4\frac{1}{2}$, ſiue $\frac{9}{2}$, eius quadratum $\frac{81}{4}$, ſiue $20\frac{1}{4}$, ad quod additus abſolutus, facit $132\frac{1}{4}$, ſiue $\frac{529}{4}$; radix eſt $\frac{23}{2}$, ſiue $11\frac{1}{2}$, ad quam additus ſemiſſis, facit 16, qui nume-

rus,

rus, quod numerus radicum sit 9 q, habet aliam radicem quadratam, 4.

DEMONSTRATIO breuis.

Extractionis huius demonstratio pendet ex quinta sec. Eucl. quæ numeris accommodata, sic habet. *Si numerus in duas partes inæquales diuidatur, erit numerus à partibus illis factus, cum quadrato semissis differentiæ duarum illarum partium, æqualis quadrato dimidij.*

ARTICVLVS VI.

DE ELEMENTIS SEcundarum radicum.

Vt in regula positionum interdum vna, interdum duabus, aut pluribus opus est positionibus; ita & in Algebra. Hactenus enim egimus tantum de radicibus vnius positionis, sine de radicibus primis. Iam paucis de secundis agendum est. Quandocunque autem pluribus, quam vna positione opus est, signantur illæ alteræ positiones literis, hoc modo; 1 A. 1 B. 1 C. 1 D, &c.

De Additione & Subtractione secundarum radicum.

Si characteres fuerint ijdem, tantum adduntur, & subtrahuntur numeri. Vt si 3 A ad 4 A addenda sint, fient 7 A. Si 3 A ex 7 A subtrahenda, restant 4 A.

Si characteres ſint diuerſi, fit additio per + : ſubtractio per —, Vt ſi addendæ ſint 3 ℞ ad 4 A, conſtantur 3 ℞ + 4 A. Si 4 A ſubtrahenda ex 3 ℞ reſtant 3 ℞ — 4 A.

DE MVLTIPLICATIONE, & Diuiſione.

Si characteres fuerint ijdem fit multiplicatio, vt in primis radicibus; Nam 4 A in 6 A, faciunt 24 A q. Si diuidenda ſint 24 A q, per 4 A, prouenient 6 A. Si diuerſi fuerint characteres, vterque retinetur in producto. Vt ſi 3 ℞ ducendæ ſint in 4 A, producentur 12 ℞ A. Si 12 ℞ A per 3 ℞ diuidenda, prouenient 4 A, tollitur enim diuiſoris character.

Radicis extractio fit vt diuiſio. Nam ſi radix quadrata ex 16 A q ſit extrahenda, erit illa 4 A. Si cubica ex 27 A ce, erit illa 3 A,

CAPVT II.

REGVLÆ ALGEBRÆ, & partium eius explicatio.

Regula Algebræ ſic habet. Ponatur pro numero abſcondito 1 ℞, quæ iuxta quæſtionis tenorem examinetur, donec æquatio inueniatur. Deinde reducatur, ſi oopus ſit, æquatio. Poſtremo per maximum coſſicum diuidatur reliquum æquationis, & proueniet numerus abſconditus vel in quoto, vel in aliqua eius radice, quæ qualis ſit, character coſſicus diuiſoris indicat. Ex hac regula apparet tres eſſe eius partes. Inuentionem æquationis,

tionis, reductionem, & resolutionem: per resolutionem intellige diuisionem, & radicis extractionem.

ANNOTATIO.

Potest etiam alius numerus ab vnitate pro radice poni: sed quando id fit, erit numerus inuentus per illam multiplicandus.

ARTICVLVS I.

DE INVENTIONE Æquationis.

Inuentio æquationis est, pro numero inueniendo ponere 1 ℞, hoc est, vnam radicem; atque cum illa procedere secundum quæstionis sententiam, non secus, ac si illa esset numerus inueniendus.

Exemplum primum. Inueniatur numerus, qui si ducatur in 3, ex producto demantur 24, residui $\frac{1}{3}$ ducatur in 5, producantur 20. Pono numerum inueniendum esse 1 ℞, cum qua procedo, vt vult quæstio, hoc est duco 1 ℞ in 3, & produco 3 ℞; ex quibus subtraho 24, hoc modo 3 ℞ — 24. huius $\frac{1}{3}$, est 1 ℞ — 8, hic numerus ductus in 5, producit 5 ℞ — 40; qui numerus iuxta quæstionis sensum, æqualis esse debet, huic 20. Inuenta ergo est æqualitas inter 5 ℞ — 40, & 20.

Secundum exemplum. Inueniantur tres numeri, hac lege vt primum secundus excedat numero hoc 4: secũdum tertius hoc 6: sitq; id quod fit ex ductu primi in secundum minus eo, quod fit ex primo in tertium, hoc numero 42. Quæro qui sint numeri? Pono primum esse 1 ℞: ergo secundus erit 1 ℞ + 4: Tertius 1 ℞ + 10.

Pri-

Primus & secundus in se ducti, & producto additis 42, faciunt 1 q + 4 ℞ + 42. Primus & tertius in se ducti, faciunt 1 q + 10 ℞, qui numeri iuxta quæstionis sensum æquales esse debent.

Tertium. Diuidatur numerus 24 in duas partes, vt si ducatur maior in 3, minor in 5, addanturque producto minoris 20, maioris 4, summæ fiant æquales. Pono maiorem esse 1 ℞: erit ergo minor 24 — 1 ℞: maior ductus in 3, facit 3 ℞: minor in 5, facit 120 — 5 ℞: si huic 20, illi addantur 4, erunt hæc 3 ℞ + 4, his 140 — 5 ℞ æqualia.

Quartum. Duo habent pecunias, quilibet certam summam, si primus dat secundo 5 aureos, habet secundus duplo plus primo: si secundus dat primo 10, habet primus triplo plus secundo. Quid quilibet habet? Pono primum habere 1 ℞, qui si dat secundo 5, retinebit ipse 1 ℞ — 5: habet autem secundus, facta hac traditione, duplo plus, quam primo relictum est: habet ergo secundus 2 ℞ — 10; ex quibus si tollas 5, quæ à primo accepit, habebit ipse 2 ℞ — 15. Qui si det primo 10, retinebit ipse 2 ℞ — 25, & habebit primus 1 ℞ + 10, triplo plus secundo: ergo si secundi pecunia relicta, nimirum 2 ℞ — 25, triplicetur, erunt hæc 1 ℞ + 10, his 6 ℞ — 75 æqualia.

Quintum. Diuidatur numerus 20 in duas partes, vt partes illæ in se ductæ, producant 91. Pono primam partem 1 ℞: erit ergo secunda 20 — 1 ℞: Hæ partes in se ductæ faciunt 20 ℞ — 1 q: quare æqualitas est inter 20 ℞ — 1 q, & 91. Ex his quinque exemplis facile videt lector, quid sit inuenire æquationem.

ARTI-

Articvlvs II.

De Redvctione æquationis.

Consistit Reductio in hoc, vt si vnius tantum generis adsint Cossici, tandiu ab vna parte in aliam particulæ transferantur, donec ex vna parte sit tantum cossicus, ex altera tantum absolutus. Si verò plures sint cossici, eadem translatio tandiu fiat, donec ex vna parte sit solus maximus cossicus cum signo +: ex altera parte minor cossicus cum absoluto. Quæ translatio fit tum per signa +, — hoc modo, si ante translationem fuerit + erit post illam —: contra si ante illam fuerit —, erit post illam +; tum his duobus principiis.

Si æqualibus æqualia addas, quæ conflantur, erunt æqualia; & si ab æqualibus æqualia demas, quæ remanent, erunt æqualia.

Hæc itaque 5℞ — 40, his 20, art. præcedente inuenta æqualia, ita reduco. Addo vtrique parti 40, & erunt hæc 5℞, his 60 æqualia. Nam cum prior pars habeat 40 minus quam 5℞ radices, si ab illis tollo 40, addo illis 40: ergo & alteri parti 40 addere debeo, vt partes æquales maneant.

Hæc 1q + 4℞ + 42, his 1q + 10℞ inuenta æqualia, sic reduco. Tollo ab vtraque parte 1q, & remanent hæc 4℞ + 42, his 10℞ æqualia. Rursus tollo ab vtraque parte 4℞, & remanent hæc 42, his 6℞ æqualia.

Tertiò, hæc 3℞ + 4, his 140 — 5℞ inuenta æqualia,

lia, ita reduco. Addo vtrique parti 5 𝔵, & erunt hæc 8 𝔵 + 4, his 140 æqualia: iterum tollo ab vtraque parte 4, & remanent hæc 8 𝔵. his 136 æqualia.

Quartò, hæc 12 𝔵 + 10, his 6 𝔵 — 75 æqualia, sic reduco. Tollo ab vtraque parte 1 𝔵, & erunt hæc 10, his 5 𝔵 — 75 æqualia: Rursus addo vtrique parti 75, eruntque hæc 85, his 5 𝔵 æqualia.

Deniq; hæc 20 𝔵 — 1 q, his 91 inuenta æqualia, sic reduco. Addo vtrique parti 1 q, & erunt hæc 20 𝔵, his 91 + 1 q æqualia: Iterum demo ab vtraq; parte 91, remanebuntque hæc 20 𝔵 — 91, huic 1 q æqualia. *Ex dictis lector facile intelliget, quod signum + subtrahat, signum — addat.*

ARTICVLVS III.

DE RESOLVTIONE SIue diuisione, & radicis extractione.

Diuisio in hoc consistit, vt, si facta reductione, ab vna parte sit absolutus, ab altera cossicus, absolutus per cossicum, abiecto charactere, diuidatur: erit enim id quod prouenit, numerus quæsitus. Vt si in prima reductione diuidantur 60 per 5 𝔵, proueniunt 12, numerus, qui in prima quæstione art. 1. erat propositus.

Si in secunda quæstione 42 per 6 𝔵 diuidantur prouenient 7, qui est numerus primus: erit ergo secundus 11, tertius 17.

Si in tertia, 136 per 8 1ϛ diuidantur, prouenient 17, numerus maior: erit igitur minor 7.

Si in quarta diuidantur, 85 per 5 1ϛ, prouenient 17, pecunia primi; erit ergo iuxta quæstionis sensum, pecunia secundi 19.

In quinta quia ab vna parte est cossicus maximus, ab altera minor cossicus cum absoluto, debet vterque, tam absolutus, quam minor cossicus, per maximum cossicum diuidi, & ex producto radix quadrata extrahi.

Diuisis igitur 20 1ϛ — 91 per 1q, proueniunt 20 1ϛ — 91. Huius radices per supra dicta inuenientur, 13,7. Semissis enim numeri radicum est 10, eius quadratum 100; ex quo subtractus absolutus propter signum —, relinquit 9, cuius radix quadrata 3, addita, & subtracta semissi numeri radicum, manifestas facit partes 13. & & 7: hæ enim partes in se ductæ, progignunt 91; vt quæstio quinta volebat.

ANNOTATIO I.

Ex tribus regulæ cossicæ partibus, hactenus explicatis difficillima est inuentio æquationis, præterquam enim quod iudicium requirit, cognitione quoq; tum Geometriæ, & Arithmeticæ; tum multarum aliarum artium cum primis opus habet.

ANNOTATIO II.

Aduerto diligēter, quando plures numeri proponuntur inueniēdi semper illū primo inueniri, pro quo ponitur 1 1ϛ. Exēpli causa, in hac quæst. Tres diuidunt inter se 100 aureos ea lege, vt secundus 4 amplius capiat primo; tertius 11. amplius secundo, quæro quid quilibet capiat? Si pono 1 1ϛ

pro

pro primo, innenio pecuniam primi, Si pro secundo, inuenio secundi. Si pro tertiò, tertij. Ponamus ergo primum habere 1 ℞: habet ergo secundus 1 ℞ + 4: tertius 1 ℞ + 15. Summa omnium 3 ℞ + 19, æqualis est numero 100. Si ab vtraq; parte tollo 19; erunt 3 ℞, & 81 æqualia. Diuisis igitur 81, per 3 ℞, proueniunt 27, pecunia primi: habet ergo secundus 31; tertius 42, qui numeri simul faciunt 100.

Ponamus iam secundum habere 1 ℞; habet ergo primus 1 ℞ — 4, tertius 1 ℞ + 11. Summa 3 ℞ + 7 est æqualis 100: & si ab vtraq; parte tollantur 7: erunt hæc 3 ℞, his 93 æqualia. Diuisis igitur 93 per 3 ℞ proueniunt 31 pecunia secundi.

Ponamus vltimo tertium habere 1 ℞, habebit ergo secundus 1 ℞ — 11; primus 1 ℞ — 15: summa 3 ℞ — 26, est æqualis 100. additis igitur vtriq; parti 26 erunt hæc 3 ℞, his 126 æqualia. Igitur diuisis 126 per 3 ℞, proueniunt 42, pecunia tertij. Vides ergo, quod in prima positione, 1 ℞ valeat 27, in secunda 31, in tertia 42, semperq; illum numerum inueniri, pro quo ponitur 1 ℞. Possent hæc sufficere: sed quia regula hæc, vt pleraque alia, exemplis solet clarescere, pergimus porrò.

CAPUT III.

DE PRAXI NUMERORUM coßicorum.

In hoc cap. Sex genera exemplorum proponemus. Primi generis erunt, in quibus, vel diuisor est vnitas vel nulla reductione opus est. Secundi generis sunt, quæ

sola

ſola diuiſio ſoluitur. Tertij, quæ ſoluit extractio radicis. Quarti, in quo ſecundæ radices occurrunt. Quinti, ſunt exempla geometrica. Sexti, in quo contractè propoſita, abſtractè ſoluuntur.

ARTICVLVS I.

EXEMPLA, IN QVIBVS vel diuiſor eſt vnitas, vel nulla reductione opus eſt.

Exemplum primum. Detur numerus, cui ſi addantur, 11, & ab eodem ſubtrahantur 7, prior ſit duplus poſterioris. Sit numerus ille 1℞: cui ſi addo 11: & ab eodem ſubtraho 7, fiunt 1℞ + 11: reſtant 1℞ − 7. Cum ergo iam numerus prior poſterioris duplus ſit, ſi duplicetur ſecundus, erunt hæc 1℞ + 11, his 2℞ − 14 æqualia. Et ſi ab vtraque parte tollatur 1℞, hæc 11, his 1℞ − 14. Rurſus ſi vtrique parti addantur 14, hæc 25, huic 1℞: numerus igitur quæſitus, eſt 25; nam 25 diuiſa per 1℞, reddunt 25.

Secundum exemplum. Dentur duo numeri differentes ſeptenario, hac lege, vt ſi minor ducatur in 2, & producto addantur 3: maior in 3, & producto addatur 1, fiat maior duplus minoris. Sit minor 1℞: erit igitur maior 1℞ + 7. Si minor ducatur in 2, & producto addantur 3, fient 2℞ + 3: Si maior ducatur in 3, & producto addatur 1, fient 3℞ + 22. Cum ergo iam maior duplus ſit minoris, ſi minor duplicetur, erunt hæc 4℞ + 6, his 3℞ + 22 æqualia. Si igitur ab vtraq; parte tollantur 3℞, erunt hæc 1℞+6, his 22 æqualia: si rursus ab vtraq; parte tollantur 6: erit & 1℞, æqualis hisce 16. Numerus ergo quæsitus minor, est 16, igitur maior 23.

Tertium. Detur numerus ex cuius $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ si tollantur 80, restent 100. Esto numerus 1℞: dictæ illius partes sunt $\frac{1}{2}$℞, $\frac{1}{3}$℞, $\frac{1}{6}$℞; summa 1℞, ex qua si subtraham 80, restant 1℞ — 80 æqualia hisce 100. Si igitur vtriq; parti addantur 80, erit & 1℞ æqualis hisce 180: igitur 180 est numerus quæsitus.

Quartum. Detur numerus, ex cuius $\frac{1}{4}$, si subtrahantur 13, residuũ ducatur in 4, proueniunt 48. Esto numerus 1℞, ex cuius $\frac{1}{4}$, si tollo 13; restant $\frac{1}{4}$℞ — 13: his ductis in 4, proueniunt 1℞ — 52, æqualia his 48. Si igitur vtrique parti addantur 52; erit & 1℞, æqualis 100: ergo 100 est numerus quæsitus.

Quintum. Duo habent pecunias. Primus dicit secundo, si mihi dares vnum aureum, haberem quantũ tu: infert secundus, si mihi dares tu vnum, haberem duplo plus te: quæro quantum quilibet habeat? Pono primum habere 1℞, cui si secundus vnum dederit, habebit 1℞+1. Cum ergo inter 1℞+1, & pecuniam residuam secundi, ponatur æqualitas, habebit secundus 1℞+2: cui si primus dederit vnum, retinebit primus 1℞—1; habebit secundus 1℞+3. Cùm ergo iam pecunia secundi sit dupla primi, si quod primus retinet duplicetur, erunt hæc 2℞—2, his 1℞+3 æqualia: & si vtrique parti addantur 2, hæc 2℞, his 1℞+5. Rursus si ab vtraque parte tollatur 1℞: hæc 5, huic 1℞: primus ergo, qui ponebatur habere 1℞, habet 5: qui si dederit secundo 1, retinebit ipse 4 habebit secundus 8, vnde si tollatur 1, restabunt 7, pecunia secundi.

ANNO-

ANNOTATIO.

Hic notetur mirabilis numerorum natura. Nam si alter alteri det 8, reperietur pecunia primi 40, secundi 56, quantum nimirum creatur ex ductu 8 in 5, & 7. Idem verum est in quemcunq; numerum ducantur 5 & 7.

Sextum. Sunt duo numeri 20. & 25, & inueniendi sunt alij duo in quadrupla proportione, vt si maior ad 25, minor addatur ad 20, conflati numeri habeant triplã proportionem. Ponatur primus 1℞: erit ergo secũdus 4℞, qui additi prioribus eo quo diximus modo, facient 20+1℞, & 25+4℞. Hi numeri cum ponantur esse in tripla proportione, ducatur minor, nẽpe 20+1℞, in 3, eruntque hi 60+3℞ æquales, his 25+4℞. Si igitur ab vtraque parte demantur 3℞, erunt & hi 60, his 25+1℞ æquales: si rursus ab vtraque parte tollantur 25, erunt & hi 35 æquales huic 1℞. Numerus ergo minor, qui ponebatur 1℞, erit 35, cuius quadruplum 140; erit alter 20 & 35 faciunt 55; at 25, & 140 faciunt 165, qui numerus cum sit triplus numeri 55, benè operati sumus.

Septimum. Detur numerus, ex quo si tollantur 3, residdui $\frac{1}{3}$ addantur 7; summa hæc ducatur in 3, rursusque ex producto tollantur 18, restent 21. Esto numerus 1℞, ex quo si tollantur 3, restant 1℞ — 3: tertia pars est $\frac{1℞-3}{3}$, cui si 7, addantur, fiunt $\frac{1℞+18}{3}$, hæc in 3
*faciunt ducta *1℞+18: hinc si tollantur 18, restat 1℞, æqualis huic 21: ergo 21 est numerus quæsitus.

Octauum. Detur numerus, cui si addam 7, & ex eodem demam 11; atq; ex conflati, & residui summa tollam numerum ipsum, residuoque huic addam 4, fiant 27. Esto numerus 1 ℞, cui si addo 7, & ab eodem subtraho 11, & vtrumque coniungo, efficio 2 + — 4: hinc si tollo 1 ℞ numerum ipsum, restant 1 ℞ — 4, quibus si addo 4, efficio 1 ℞, æqualem hisce 27: ergo 27 est numerus quæsitus. Nam si illi addo 7, conflo 34; si adimo 11, relinquuntur 16: summa 34, & 16, est 50, ex qua si tollo 27, restant 23, his si ddo 4, conflo 27, numorum desideratum.

Nonum. Dentur duo numeri, quorum differentia sit 12 hac lege, vt si quartam partem summæ illorum ducam in 2, & ex producto tollamus 6, relinquantur 20. Sit numerus minor 1 ℞: erit igitur maior 1 ℞ + 12. Summa vtriusque est 2 ℞ + 12; quarta pars, $\frac{1}{2}$ ℞ + 3, quæ ducta in 2 facit 1 ℞ + 6: Vnde si demam 6, restat 1 ℞, æqualis 20. Ergo 20 est numerus quæsitus minor: ergo maior 32: summa vtriusque 52, quarta pars 13 ducta in 2, facit 26. Vnde si tollam 6, restant 20.

Decimum. Progressionis Arithmeticæ primus terminus est 7, vltimus 40; summa omnium 282, quæro quis sit numerus terminorum? Pono esse 1 ℞: summa primi, & vltimi est 47, quæ in $\frac{1}{2}$ ℞, semissem numeri terminorum ducta, facit $\frac{47}{2 ℞}$: ergo 282, & $\frac{47}{2 ℞}$ sunt æqualia. Facta igitur diuisione, erit numerus terminorum 12. Differentia progressionis, reperitur per regulam tertiam. Progress. Arith.

Vndecimum. Quidam mercator lucratur $\frac{1}{3}$ suæ pecuniæ: de summa expendit 8; residui lucratur $\frac{1}{4}$, expenditque de hac postrema summa 15: denique residui huius vltimi lucratur $\frac{1}{5}$, atque expendit 5: ac tandem reperit se 25 aureis amplius habere, quam ab initio habuerat. Quæro quot ab initio habuerit au. quot iam ha-

habeat? Pono habuisse 1℞, cui $\frac{1}{3}$ addita, facit $\frac{4}{3}$℞: Ex his sublatis 8, restant $\frac{4}{3}$℞ — 8. Quibus si addatur $\frac{1}{4}$, fient $\frac{5}{3}$℞ — 10; ex his dempta 15, relinquunt $\frac{5}{3}$℞ — 25, huius $\frac{1}{5}$ est $\frac{1}{3}$℞ — 5, quæ addita his $\frac{5}{3}$℞ — 25, facit $\frac{6}{3}$℞ — 30, siue 2℞ — 30. Vnde si, si tollantur 5, restant 2℞ — 35. Hæc cum numero hoc 25 superent pecuniam, quam ab initio habuit, erunt hæc 2℞ — 35, his 1℞ + 25 æqualia; & si ab vtraq; parte tollatur 1℞, hæc 1℞, hæc 1℞ — 35, his 25. Rursus si vtriq; parti addantur 35, erunt & hæc 60, huic 1℞ æqualia: ab initio ergo habuit 60 au. iam habet 85.

ARTICVLVS II.

EXEMPLA, QVÆ SOla diuisio soluit.

Primum exemplum. Quidam mercator rogatus, quot haberet pecunias, respondit si pro mercibus darem $\frac{3}{5}$, & $\frac{1}{4}$ meæ pecuniæ; tu vero mihi donares 50, haberem 200: quæro quantum habeat? Pono habere 1℞, ex qua si $\frac{3}{5}$, & $\frac{1}{4}$ tollantur, restant $\frac{3}{20}$℞, quæ cum 50 faciunt $\frac{3}{20}$℞ + 50: sunt ergo $\frac{3}{20}$℞ + 50, & 200 æqualia; & si ab vtraque parte tollantur 50, erunt & hæc $\frac{3}{20}$℞, his 150 æqualia. Diuisis igitur 150 per $\frac{3}{20}$℞, proueniunt 1000; atque tot mercator habet au. Nam $\frac{3}{5}$ de 1000 sunt 600; $\frac{1}{4}$ est 250; quæ subtracta de 1000, relinquunt 150; his si addantur 50; conflantur 200.

Secundum. Diuidatur numerus 100 in duas partes, vt $\frac{3}{4}$ maioris sint æquales minori cum 5. Ponatur maior

ior 1℞: erit igitur minor 100—1℞. Maioris $\frac{3}{4}$ faciunt $\frac{3}{4}$℞; minor cum 5 facit 105—1℞: sunt ergo hæc $\frac{3}{4}$℞, his 105—1℞ æqualia. Et si vtriq; parti addatur 1℞ hæc $1\frac{3}{4}$℞, his 105. Diuisis ergo 105 per $1\frac{3}{4}$℞, proueniunt 60, pars maior; erit igitur minor 40. Maioris $\frac{3}{4}$ sunt 45; totidem quia minor cum 5 facit, bene operati sumus.

Tertium. Da numerum, à cuius triplo, si tollam 30, residuum duplicẽ, à producto deducam 140, residuum ducã in 4 à producto tollam 100, restet nihil. Quæro qui sit numerus? Pono esse 1℞; à cuius triplo si tollam 30, restant 3℞—30; ab huius duplo 6℞—60, si deducã 140, restant 6℞—200: hæc in 4 ducta, progignunt 24℞—800; à quibus si tollam 100, restant 24℞—900. quæ sunt æqualia nihilo. Siue hæc 24℞—900 sunt æqualia vni 0. Et si vtriq; parti addãtur 900, erunt & hęc 24℞, his 900 æqualia. Diuisis igitur 900 per 24℞ proueniunt $37\frac{1}{2}$, numerus quæsitus. Si enim ab eius triplo $112\frac{1}{2}$ tollam 30, restant $82\frac{1}{2}$; & si ab huius duplo 165, demam 140, restant 25; ac deniq; si à quadruplo huius 25, nimirum à 100, tollam 100 restat 0.

Quartum. Inueniatur numerus, cui si addatur $\frac{1}{4}$ sui, & 7, tantum supra 90 excrescat, quantũ ipse est infra 79. Ponatur numerus ille 1℞: cui si addatur $\frac{1}{4}$ sui, & 7, fient $1\frac{1}{4}$℞+7. Hic numerus cum tantum sit supra 90; quantum 1℞ est infra 79, fit. vt si 1℞ ex 79, & 90 ex $1\frac{1}{4}$℞+7 subtrahantur, residua 79—1℞ & $1\frac{1}{4}$℞+7—90, sint æqualia. Quare si vtriq; parti addantur 90, erunt & hæc 169—1℞, his $1\frac{1}{4}$℞+7 æqualia. Si rursus vtrique partĩ addatur 1℞, erunt & hęc 169, his $2\frac{1}{4}$℞+7 æqualia.

Deni-

Denique si ab vtraque parte demantur 7, erunt & hæc 162, his $2\frac{1}{4}$℞ æqualia. Diuisis ergo 162 per $2\frac{1}{4}$℞ proueniunt 72. Numerus quæsitus, cui si $\frac{1}{4}$ sui cum 7 addantur, fient 97, qui numerus tantum est supra 90, quantum 72 sunt infra 79.

Quintum. Ementium agrum 100 aureis ait alter alteri, si mihi tuæ pecuniæ $\frac{1}{2}$, & 5 aureos dares; agrum emere possem. Infert alter, si tu $\frac{1}{3}$ tuæ mihi dares, ememerem agrum. Quot quilibet aureos habet? Pono primum habere 1℞: alrer ergo habet 100 — $\frac{1}{3}$℞ (siquidem cum $\frac{1}{3}$ primi habet 100) cuius dimidium cum 5 additum pecuniæ primi, conficit 55 + $\frac{5}{6}$℞, quæ sunt æqualia his 100: & si ab vtraq; parte tollam 55, erunt & hæc 45, his $\frac{5}{6}$℞. æqualia. Diuisis ergo 4 per $\frac{5}{6}$ proueniunt 54, pecunia primi, cuius $\frac{1}{3}$, nempe 18 ex 100 sublata, relinquit 82, pecuniam secundi, huius enim dimidium 41, cum 5 additum pecuniæ primi facit 100. Pari modo $\frac{1}{3}$ pecuniæ primi addita pecuniæ secundi, facit 100.

Sextum. Diuidatur numerus 10 in duas partes, vt maiore per minorem diuisa, proueniant 20. Pono maiorem 1℞: erit igitur minor 10—1℞: diuiso illo per hunc, proueniunt $\frac{1℞}{10-1℞}$, quæ sunt æqualia his 20. Siue hæc $\frac{1℞}{10-1℞}$, sunt his $\frac{20}{1}$ æqualia. Et reductis illis ad eandem denominationem, hæc $\frac{1℞}{10-1℞}$ his $\frac{200-20℞}{10-1℞}$, sublatoque communi denominatore, hæc 1℞, his 200 — 20℞. Et si vtriq; parti addantur 20℞, hæc 21℞, his 200. Diuisis igitur 200 per 21℞ proueniunt $9\frac{11}{21}$ pars maior: erit igitur minor $\frac{10}{21}$. Diuisis enim $9\frac{11}{21}$ per $\frac{10}{21}$, proueniunt 20, quod erat propositum.

ANNOTATIO.

Reducuntur hæ fractiones $\frac{1℞}{10-1℞}$ X $\frac{20}{1}$ ad eandem denominationem per omnia, vt in reductione de absolutis diximus. Ducuntur enim denominatores in se, & fit communis denominator 10 — 1℞. Pro numeratoribus ducuntur per crucem, 10 — 1℞ in 20, & fiunt 200 — 20℞, & 1. in 1℞ & fit 1℞ hoc modo $\frac{200-20℞}{10-1℞}$, $\frac{1℞}{10-1℞}$.

Septimum exemplum. Viator quot diebus 7 milliaria conficit; alter 12 diebus post ab eodem loco discedit, peragitque quotidie milliaria 9: quæro quoto die hic posterior priorē cōsequatur? Hic primus 84 milliaria cōficit, antequā posterior iter instituit, septies n. 12 sunt 84. Quare inueniendus est numerus, qui ductus in 7, productoq; additis 84, tantum fiat, quātum si idem numerus ducatur in 9. Ponatur numerus ille 1℞, quæ ducta in 7, facit 7℞, quæ cum 84 faciunt 7℞ + 84. Idem numerus ductus in 9 facit 9℞; sunt ergo hæc 7℞ + 84, his 9℞ æqualia; & sublatis ab vtraq; parte 7℞, hæc 84, his 2℞. Diuisis igitur 84 per 2℞, proueniunt 42. Atque tot diebus posterior priorem consequitur. Ductis enim 42 in 7, & producto additis 84, fiunt 378; totidem fiunt ex 42 in 9.

Octauum. Diuidatur numerus 38 in tres continuè proportionales, vt quod fit à primo, & tertio proportionem habeat sesquialteram ad id, quod fit à primo & secundo. Ponatur secundus 1℞: erunt ergo primus & tertius simul 38 — 1℞. Secundus in se ductis facit 1q: totidem cum faciat primus in tertium, fit, vt productum primi, & secundi habeat ad productum secundi in se proportionem sesquialteram, per proprietat. 3. progress. geomet. erit ergo quod fit à primo, & secundo

$\frac{2}{3}$ q, quod diuiſum per 1 ℞, producit numerum primum $\frac{2\text{℞}}{3}$; qui ſubtractus à ſumma primi & tertij, relinquit tertium 38 — $\frac{5}{3}$ ℞, ſiue $\frac{114-5\text{℞}}{3}$. Ductus primus in tertium facit $\frac{228\text{℞}-10\text{q}}{9}$, quod eſt æquale 1q, quadrato nimirum ſecundi; ſiue, ſublato denominatore 9, eoque in 1q ducto, erunt hæc 9 q his 228 ℞ — 10 q æqualia. Et ſi vtrinque addantur 10q hæc 228℞ his 19q; & abbreuiatis characteribus hæc 228, his 19 ℞. Diuiſis ergo 228 per 19, proueniunt 12, numerus ſecundus; primus ergo, qui inuentus eſt $\frac{2\text{℞}}{3}$, erit 8, tertius 18.

Nonum. Quidam expendit ſuæ pecuniæ $\frac{3}{5}$, plus 70 aureos; qua expenſione facta, reliqui illi erant 220 aurei : quæro quantum pecuniæ habuerit? Pono habuiſſe 1℞. Vnde ſi expendat $\frac{3}{5}$, plus 70, reſtant $\frac{2\text{℞}}{5}$ — 70, quæ ſunt æqualia his 220. Si igitur vtriq; parti addantur 70; erunt & hæc $\frac{2}{5}$ ℞, his 290 æqualia. Diuiſis igitur 290, per $\frac{2}{5}$ ℞, proueniunt 725; atque tot aureos habuit: ex quibus ſi $\frac{3}{5}$, & 70 ſubtrahas, reſtant 220.

Decimũ. Quatuor inter ſe diuidunt 1000 aureos, ſecũdus toties capit 3, quoties primus 2, tertius toties 5, quoties ſecũdus 4, quartus toties 7. quoties tertius 6. Quæro quid quilibet capiat? Pono primum capere 1 ℞: & quia quoties primus capit 2, toties ſecundus capit 3, dico. 2 | 1 ℞ | 3, & inuenio pro ſecundo $\frac{3}{2}$ ℞. Rurſus quia quoties ſecundus capit 4, toties tertius capit 5, dico. 4 | $\frac{3}{2}$ ℞ | 5, & inuenio pro tertio $\frac{15\text{℞}}{8}$. Denique quia quoties tertius capit 6, toties quartus capit 7, dico. 6 | $\frac{15}{8}$ ℞ | 7, & reperio pro quarto $\frac{105\text{℞}}{48}$, ſiue $\frac{35}{16}$ ℞. Sũma omniũ eſt $\frac{105\text{℞}}{16}$, æqualis 1000. Diuiſis igitur 1000 per $\frac{105\text{℞}}{16}$ proueniũt $152\frac{8}{21}$, pecunia primi; quã ſi ducas in 3. productũ diuidas per 2, ~~in 3~~, prodit pecunia ſecũdi $228\frac{12}{21}$:

ducta in 5, producto diuiso per 4, prouenit pecunia tertij $285\frac{15}{21}$. Deniq; hac ducta in 7, producto diuiso per 6, prodit pecunia quarti $333\frac{7}{21}$. Summa omnium est 1000: bene ergo operati sumus.

Vndecimum. Habeo duo pocula, & vnum operculum, quod æstimatur 90 aureis. Additum operculū precio minoris poculi facit summā duplam precij maioris poculi: additum verò precio maioris, facit summam triplam precij poculi minoris. Quæro quid vtrumq; poculum valeat? Pono minus valere 1℞, cui si addantur 90, erit summa 1℞ + 90 dupla precij poculi maioris: maius ergo valet $\frac{1}{2}$℞ + 45. Si iam 90 ad maioris precij poculum addantur, erit summa $\frac{1}{2}$℞ + 135 tripla precij minoris poculi: Ergo cum precium minoris positum sit 1℞, erunt hæc 3℞, his $\frac{1}{2}$℞ + 135 æqualia; & si ab vtraque parte tollatur $\frac{1}{2}$℞, hæc $2\frac{1}{2}$℞, his 135. Diuisis ergo 135 per $2\frac{1}{2}$℞ proueniunt 54, precium minoris poculi: cui si addantur 90, & summa per 2 diuidatur, inuenientur 72 precium maioris poculi.

Duodecimum. Quidam habet duo pocula, & vnum operculum. Alterum poculum æstimatur 60 aureis, si operculum addatur poculo 60 aureorum, erit summa dupla precij poculi ignoti: si addatur operculum poculo precij ignoti, erit summa tripla precij poculi noti. Quæro quanti Ignotum poculum, & operculum æstimentur? Cum summa ignoti poculi, & operculi sit tripla precij noti poculi, valebunt simul 180 aureos: Si igitur numerus 180 ita diuidatur, vt vna pars cum 60 sit dupla partis alterius, proueniet precium operculi. Sint ergo partes 1℞, & 180 — 1℞,

Addan-

Addantur 60 ad 1℞, vt fiant 1℞ + 60, quæ cum iam dupla sit partis 180 — 1℞, si 180 — 1℞ duplicentur, erunt hæc 1℞ + 60, his 360 — 2℞ æqualia, &, facta reductione hæc 3℞, his 300. Diuisis ergo 300 per 3℞ proueniunt 100, precium operculi, alterum ergo poculum valebit 80. au.

Decimumtertium. Est progressio Arithmetica 12 terminorum, summa omnium est 282, differentia 3. Quæro quis sit primus terminus? Pono 1℞: ergo vltimus erit 33 + 1℞ per 1. regul. progress: Arithmet. Summa primi, & vltimi 33 + 2℞, quæ ducta in 6, semissem terminorum, facit 198 + 12℞, æqualia his 282: igitur facta reductione, & diuisione, erit terminus primus 7.

Decimum quartum. Quinq; vlnæ panni nigri, & 7 panni rubri valent 110 aureos, & eodem precio 11 vlnæ panni nigri, & 15 rubri valent 238. au. Quid vna vlna panni nigri, quid vna rubri valet? Pono vnam nigri valore 1℞: quinque ergo valent 5℞, ac proinde 7 rubri valebunt 110 — 5℞. Eodem modo 11 vlnæ nigri valebunt 11℞, quindecim rubri 238 — 11℞. Si iam dicas, 7 vlnæ panni rubri valent 110 — 5℞, quid valent 15, reperies $235\frac{5}{7}$ — $10\frac{5}{7}$℞; sed & valent 238 — 11℞. Sunt igitur $235\frac{5}{7}$ — $10\frac{5}{7}$℞, & 238 — 11℞ æqualia; factaque reductione, $\frac{2}{7}$℞, & $2\frac{2}{7}$: Diuisis igitur $2\frac{2}{7}$ per $\frac{2}{7}$℞, proueniunt 8; atque tot aureos valet vna vlna panni nigri, & quinque, 40; quibus ex 110 subtractis, restant 70: ergo cum 7 vlnæ panni rubri valeant 70 aureos, valebit vna, 10. Rursus cum 11 vlnæ panni nigri valeant 88 aureos, valebunt 15 rubri (subtractis 88 ex 238) 150: ergo vna 10.

ARTICVLVS III.

EXEMPLA, QVÆ EXtractio radicis soluit.

Primum. Dentur duo numeri in dupla proportione, quorum quadrata in se ducta faciant 58564. Pono primum 1ꝶ: erit ergo secundus 2ꝶ; horum quadrata 1q, 4q in se ducta faciunt 4qq. Quare hæc 4qq, his 58564 sunt æqualia. Diuisis ergo 58564, per 4qq, proueniunt 14641, quorum radix biquadrata, propter characterem qq, est 11, numerus primus: erit igitur secundus 22.

Secundum. Dentur duo numeri in tripla proportione, quorum cubi coniuncti faciant 9604. Ponatur primus 1ꝶ erit ergo alter 3ꝶ; horũ cubi coniuncti faciunt 28ce; sunt ergo 28ce, & 9604 æqualia. Quare diuisis 9604 per 28ce proueniunt 343, cuius radix cubica (propter characterem ce) est 7, numerus primus: erit ergo secundus 21.

Tertium. Inueniantur duo numeri, quorum differentia sit 10, faciantq; numeri illi in se ducti 459. Ponatur primus 1ꝶ: erit igitur alter 1ꝶ+10: hi numeri in se ducti faciunt 1q+10ꝶ. Sunt ergo hæc 1q+10ꝶ, his 459 æqualia: & si ab vtraque parte tollantur 10ꝶ, erit & 1q, his 459 — 10ꝶ, æquale. Cum ergo hi tres numeri seruent proportionem Arithmeticam, eorumq; exponentes sint 2.0.1. poterit ex illis radix quadrata extrahi. Diuisis igitur 459 — 10ꝶ, per 1q, proueniunt

459 — 10ꝛ: huius numeri radices ſnnt 17, & 27. Nam ſemiſſis numeri radicum eſt 5, eius quadratum 25, ad quod additus abſolutus, propter ſignum +, facit 484; huius numeri radici quadratæ 22, ſi addatur, & ſubtrahatur ſemiſſis numeri radicum 5, prodeunt dicti numeri 17 & 27.

Ruartum. Sit numerus 20 in duas partes diuidendus, hac lege, vt partes in ſe ductæ, gignant 91. Pono primam partem 1ꝛ: erit igitur altera 20 — 1ꝛ, quæ in in ſe ductæ faciunt 20ꝛ — 1q, æqualia his 91. Factæ reductione, erunt hæc 20ꝛ — 91, huic 1q æqualia. Quibus ex numeris, cum eorum exponentes 1. 0. 2, ſeruent proportionem Arithmeticam, poteſt extrahi radix quadrata. Diuiſis enim 20ꝛ — 91 per 1q, proueniũt 20ꝛ — 91. Ex quo iam extrahitur radix quadrata. Semiſſis numeri radicum eſt 10; ex cuius quadrato 100 ſubtractus abſolutus propter ſignum —, relinquit 9; cuius radix 3 addita, & ſubtracta ſemiſſi, exhibet partes 13 & 7, in quas numerus 20 diuidendus proponebatur.

Quintum. Quæratur numerus, qui maior ſit alio quodam numero 6. alio minor 8, faciantque illi duo numeri in ſe ducti 9752. Sit numerus ille 1ꝛ: ergo 6 vnitatibus illo maior erit 1ꝛ + 6; minor vero 8 vnitatibus, erit 1ꝛ — 8. Hi numeri in ſe ducti, faciunt 1q — 2ꝛ — 48, quæ ſunt æqualia his 9752; & facta reductione, erit 1q, his 9800 + 2ꝛ æquale. Dimidium numeri radicum eſt 1, ad cuius quadretum 1, abſolutus additus propter ſignum +, facit 9701: ad huius vero numeri radicem quadratam 99, additum dimidium numeri radicum, facit 100, qui eſt numerus quæſitus: maior

ior illo 6 vnitatibus eſt 106, minor 8, eſt 92; at hi duo numeri in ſe ducti faciunt 9752: ergo quæſtio ſoluta eſt.

Sextum. Diuidatur numerus 12 in duas partes, vt quod ex multiplicatione partium fit, diuiſum per partium differentiam, reddat $17\frac{1}{2}$. Partes ſunt, prior 1℞; altera 12—1℞, quæ in ſe ductæ faciunt 12℞—1q. Differentia partium eſt 2℞—12: nam ſi 12—1℞, ex 1℞ ſubtrahantur, reſtant 2℞—12; per quã differentiam ſi 12℞—1q diuidantur, erit quotus $\frac{12℞-1q}{2℞-12}$; qui eſt æqualis numero $17\frac{1}{2}$. Hi duo numeri ducti ad eandem denominationem faciunt $\frac{24℞\ 2q}{1℞-24}$, & $\frac{70℞-420}{4℞-24}$, quæ ſunt etiam æqualia. Abiecto ergo denominatore communi, erunt quoque numeratores 24℞—2q, & 70℞—420, æquales facta reductione, erunt hæc 2q, his 420—46℞ æqualia. Diuiſis iam 420—46℞ per 2q, proueniunt 210—23℞. Semiſſis numeri radicum eſt $11\frac{1}{2}$, ad eius quadratum $132\frac{1}{4}$, abſolutus propter ſignum + additus, facit $342\frac{1}{4}$: ex huius radice quadrata $18\frac{1}{2}$, ſi ſemiſſis numeri radicum, propter ſignum —, ſubtrahatur, reſtant 7, pars maior; erit ergo minor 5. Nam hi numeri in ſe ducti faciunt 35, qui numerus per eorum differentiam 2 diuiſus, reddit quotum $17\frac{1}{2}$.

Septimum. Dentur duo numeri, quorum differentia ſit 8, hac lege, vt ſi differentia quadratorum ipſorum ſubtrahatur ex ipſorum rectangulo, relinquatur. 1. Pono primum eſſe 1℞: erit ergo alter 1℞+8. Quadrata ipſorum ſunt 1q, & 1q+16℞+64; differentia quadratorum eſt 16℞+64; qua ex rectangulo ipſo-

ipſorum, quod eſt $1q + 8x$, ſubtracta, relinquuntur $1q - 8x - 64$, quæ ſunt æqualia. 1. Si igitur vtrique parti addantur 64, erunt hæc $1q - 8x$, his 65 æqualia. Si rurſus vtrique parti addantur $8x$, erit & hoc $1q$, his $65 + 8x$ æquale, cuius radix 13, eſt numerus minor: erit ergo maior 21.

Octauum. Sunt tres numeri proportionales, quorum ſumma eſt 91. medius 21. quæro qui ſit primus, qui tertius? Pono primum eſſe $1x$; & cum ſecundus ſit 21; erit tertius $70 - 1x$. Quoniam verò quando tres numeri ſunt proportionales, eſt rectangulum extremorum, æquale quadrato medij, fit vt hæc 441, his $70x - 1q$ ſint æqualia; & ſi vtrique parti addatur $1q$, erunt & hæc $441 + 1q$, his $70x$ æqualia: rurſus ſi ab vtraque parte demantur 441, erit & hoc $1q$, his $70x - 441$ æquale. Semiſſis numeri radicum eſt 35, eius quadratum 1225, vnde ſubtractus abſolutus, relinquit 784, huius numeri radix 28 addita ſemiſſi, facit 63, ſubtracta ex eodem relinquit 7. Sunt igitur hi tres numeri 7. 21. 63 ſimul facientes 91, quæſiti, ſunt enim, vt quæſtio volebat, proportionales.

Nonum. Dentur duo numeri, quorum quadrata habeant proportionem hanc $\frac{9}{4}$, faciantque quadrata cum numeris, 1628. Quia quadrata ponuntur habere proportionem hanc $\frac{9}{4}$, habebunt numeri hanc $\frac{3}{2}$ (numeri enim 3, 2, ſunt numerorũ 9, & 4 radices.) Quare ſi primus numerus ponatur $1x$: erit alter $\frac{3}{2}x$: ſumma quadratorum eſt $\frac{13}{4}q$, ſumma numerorum $\frac{5}{2}x$: ergo hæc $\frac{13}{4}q + \frac{5}{2}x$ ſunt his 1628, æqualia; & ſi ab si ab vtraq; parte tollantur $\frac{5}{2}\mathcal{R}$, hæc $\frac{13}{4}q$, his $1628-\frac{5}{2}\mathcal{R}$: diuisis ergo $1628-\frac{5}{2}\mathcal{R}$ per $\frac{13}{4}q$, proueniunt $500\frac{12}{13}-\frac{10}{13}\mathcal{R}$. Semissis numeri radicum est $\frac{5}{13}$, eius quadratum $\frac{25}{169}$, ad quod additus absolutus, facit $501\frac{12}{169}$: ex huius radice quadrata $22\frac{5}{13}$: si tollatur semissis numeri radicum, restant 22, numerus primus: ergo cum alter ad hunc proportionem habeat sesquialteram, hoc est talem, qualis est inter 3&2, erit alter 33.

Decimum. Duo caupones habent vinum. Primus 80; alter 120 mensuras, vendit posterior vnam mensuram vno aureo carius, quam prior: venditione peracta, habent ambo simul 44 aureos. Quæro quot mensuras quilibet vno aureo vendiderit? Pono priorem vno aureo vendidisse $1\mathcal{R}$: ergo alter vno aureo vendidit $1\mathcal{R}+1$, adeoq; prior omnes $\frac{80}{1\mathcal{R}}$; posterior omnes $\frac{120}{1\mathcal{R}+1}$ aureis vendidit. Hæc simul faciunt $\frac{200\mathcal{R}+80}{1q+1\mathcal{R}}$, quæ sunt his 44 æqualia, siue his $\frac{44}{1}$. Quæ si ad eandem denominationem reducantur, erunt hæc $\frac{200\mathcal{R}+80}{1q+1\mathcal{R}}$, his $\frac{44q+44\mathcal{R}}{1q+1\mathcal{R}}$ æqualia, sublatoque communi denominatore, hæc $200\mathcal{R}+80$, his $44q+44\mathcal{R}$. Facta ergo reductione, & diuisione, proueniunt $\frac{39\mathcal{R}}{11}+\frac{20}{11}$, cuius numeri radix est 4: vendidit ergo prior 4 mensuras vno au, posterior 5. Nam si diuidas 80 per 4, proueniunt 20. si 120 per 5; proueniunt 24, quæ simul faciunt 44, vt quæstio voluit.

3 *Sed extrahamus radicem quadratam ex hoc numero $\frac{39\mathcal{R}}{11}+\frac{20}{11}$. Semissis numeri radicum est $\frac{39\mathcal{R}}{484}$ cui si addatur absolutus $\frac{20}{11}$, siue $\frac{880}{484}$, fient $\frac{2401}{484}$, radices sunt $\frac{49}{22}$, quæ si semissi numeri radicum addantur fient $\frac{88}{22}$, siue 4.*

Vndecimum. Detur numerus, ex cuius biquadrato si tollantur 10 quadrata, residua sint 3400;11.

Pona-

Ponatur numerus 1ℛ: erit eius biquadratum 1qq; ex quo si tollantur 10q, erunt hæc 1qq — 10q his 3400311. æqualia. Si vtrique parti addantur — 10q, erit & hoc 1qq, his 3400311 + 10q æquale. Radix numeri 340011 + 10q est 1849, ex quo numero, cum numerus radicum habeat characterem hunc q, eruenda est radix quadrata, quæ est 43, qui numerus est 15, qui quæritur.

Duodecimum. Detur numerus, cuius biquadratum & cubus simul, ad 21 eius quadrata habeant proportionem, quam 36 ad 1. Ponatur numerus ille 1ℛ: erit igitur eius quadratum 1q, cubus 1c, biquadratum 1qq. Quadrata 21 sunt ad 1qq + 1c, vt 1 ad 36, Ductis ergo 21q in 36, erunt hæc 1qq + 1c, his 756q æqualia. Et si ab vtraque parte tollatur 1c, erit hoc 1qq, his 756q — 1c æquale. Hic locum numeri radicum tenet 1c; absoluti 756q. Exponentes horum characterum qq, c, q, sunt 4. 3. 2. ex quibus si subtrahãtur 2, restant 2. 1. 0, vt proinde, abbreuiatis characteribus, 1q æquale sit his 756 — 1ℛ. Semissis numeri radicum est $\frac{1}{2}$ ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$ additus absolutus, propter signum +, facit $756\frac{1}{4}$. Ex huius radice $27\frac{1}{2}$, si tollatur semissis numeri radicum $\frac{1}{2}$, propter signum —, restant 27, numerus quæsitus. *Abbreuiari autem nunc tantum characteres possunt, quando eorum exponentes sunt numeri. Quando duo sunt numeri, tertius 0, abbreuiari non possunt, vt in præcedente exemplo, in quo exponentes erant 4, 2, 0.*

Decimum tertiũ. Est alicuius progressionis Arithmeticæ ab vnitate incipientis sũma 91, differẽtia 4. Quæritur vltimus terminus, Pono esse 1ℛ. Ex quo si per regul. 4. progress. Arith. tollo primũ reliquum per differentiã 4 diuido, & quoto vnitatẽ addo, habeo numerũ terminorũ $\frac{1\mathcal{R}+3}{4}$, in cuius semissem $\frac{1\mathcal{R}+3}{8}$, si duco summam primi, & vltimi termini, nimirũ $1\mathcal{R}+1$, pduco $\frac{1q+4\mathcal{R}+3}{8}$, summam terminorum: sed & 91, est eadem summa: ergo $\frac{1q+4\mathcal{R}+3}{8}$, & 91 sunt æqualia, quæ si ad eandem denominationem reducantur, & communis denominator tollatur, erunt & hæc $1q+4\mathcal{R}+3$, his 728 æqualia, & facta reductione, hoc 1q, his $725-4\mathcal{R}$, cuius numeri radix 25, est terminus vltimus.

Decimum quartum. Quidam conficit milliaria 1090. Primo die vnum, secundo $\frac{1}{5}$ amplius: tertio rursus $\frac{1}{5}$ amplius, & eadem deinceps differentia. Quæro quanto tempore totum iter absoluat? Pono $1\mathcal{R}$ dierũ. Vnde si tollam 1, & residuum ducam in differentiam $\frac{1}{5}$, productoq́; addam primum terminum, efficio $\frac{1\mathcal{R}+4}{5}$ vltimum terminum; per regul. 1. progress. Arith. cui si addo primum, hoc est, 1, efficio $\frac{1\mathcal{R}+9}{5}$, quo in semissem numeri terminorum, nempe in $\frac{1}{2}\mathcal{R}$ ducto, produco $\frac{1q+9\mathcal{R}}{10}$, summam omnium terminorum; sed & eadem
10 summa est 1090; sunt ergo $\frac{1q+9\mathcal{R}}{10}$ & 1090 æqualia: ergo & (facta reductione ad eosdem terminos, & communi denominatore abiecto) hæc $1q+9\mathcal{R}$, his 10900; & si ab vtraque parte tollantur $9\mathcal{R}$, hoc 1q, his $10900+9\mathcal{R}$, cuius numeri radix 100, est numerus dierum, quibus milliaria 1090 conficit.

ARTICVLVS IIII.

EXEMPLA SECVNDArum radicum.

In hoc exemplorum genere pro secundis radicibus ponun-

ponuntur literæ A, B, C, &c. quæ per reductionem ad primas reducuntur, vt exempla docebunt.

Primum exemplum. Inueniantur tres numeri, quorum primus cum 136, ſit duplus ſecundi, & tertij. Secundus cum 184, triplus primi, & tertij. Tertius cum 176, quadruplus primi, & ſecundi. Ponatur primus 1℞, qui quia cum 136, eſt duplus ſecundi & tertij, erunt ſecundus & tertius ſimul $\frac{1}{2}$℞+68, quibus ſi addatur 1℞, erunt omnes tres $1\frac{1}{2}$℞+68. Ponatur ſecundus 1A, qui ſi ſubtrahatur ex $1\frac{1}{2}$℞+68, reſtant primus & tertius, $1\frac{1}{2}$℞+68−1A. Quia vero ſecũdus cum 184, hoc eſt, 1A+184, triplus eſt primi & tertij, ſi $1\frac{1}{2}$℞+68−1A, in 3 ducantur, erũt hæc 1A+184, his $4\frac{1}{2}$℞+204−3A æqualia. Et ſi vtriq; parti addantur 3A, hæc 4A+184, his $4\frac{1}{2}$℞+204. Iterum ſi ab vtraq; parte tollantur 184, hæc 4A, his $4\frac{1}{2}$℞+20. Ergo ſi 4A æquantur his $4\frac{1}{2}$℞+20; æquabitur; 1A, his $1\frac{1}{8}$℞+5. Secundus ergo, qui ponebatur 1A, eſt $1\frac{1}{8}$℞+5. Ponatur tertius 1B: ergo primus, & ſecundus erunt $1\frac{1}{2}$℞+68−1B. Et quia tertius cum 176 eſt quadruplus primi, & ſecundi, erunt hæc 1B+176, his 6℞+272−4B æqualia: & ſi vtriq; parti addantur 4B, hæc 5B+176, his 6℞+272. Rurſus ſi ab vtraque parte tollantur 176, hæc 5B, his 6℞+96. Quare ſi 5B æquantur his 6℞+96, æquabitur 1B, his $1\frac{1}{5}$℞+$19\frac{1}{5}$. Tertius ergo; qui ponebatur 1B, erit $1\frac{1}{5}$℞+$19\frac{1}{5}$. Cum igitur primus poſitus ſit 1℞, ſecundus, & tertius inuenti ſint $1\frac{1}{8}$℞+5, & $1\frac{1}{5}$℞+$19\frac{1}{5}$, erunt omnes tres $3\frac{13}{40}$℞+$24\frac{1}{5}$. Sed quoque ſunt $1\frac{1}{2}$℞+68: ergo hæc $3\frac{13}{40}$℞+$24\frac{1}{5}$, his $1\frac{1}{2}$℞+68 ſunt æqualia: & ſi ab vtraque parte tollantur $1\frac{1}{2}$℞, hæc $1\frac{33}{40}$℞+$24\frac{1}{5}$, his 68. Rurſus ſi ab vtraque parte tollantur $24\frac{1}{5}$, hæc $1\frac{33}{40}$℞, his $43\frac{4}{5}$. Diuisis ergo $43\frac{4}{5}$ per $1\frac{37}{40}$ρ, proueniunt 24, numerus primus. Ergo secũdus, qui inuẽtus est $1\frac{1}{8}$ρ $+5$, erit 32: tertius verò, qui inuentus est $1\frac{1}{5}$ρ $+19\frac{1}{5}$, erit 48. Nam si 24 ducantur in $1\frac{1}{8}$ρ, prouenient 27, quæ cum 5 faciunt 32. Et si 24 ducantur in $1\frac{1}{5}$ρ, prouenient $28\frac{4}{5}$, quæ cum $19\frac{1}{5}$, faciunt 48. Quod autem inuenti tres hi numeri 24, 32, 48 quæstioni satisfaciant, facile probabis.

Secundum. Tres habent pecunias, si secundus, & tertius dent primo $\frac{1}{3}$ suæ pecuniæ, habebit primus 100. Si primus, & tertius dent secundo $\frac{1}{4}$ suæ pecuniæ, habebit secundus 100. Si primus, & secundus dent tertio $\frac{1}{5}$ suæ pecuniæ, habebit tertius 100. Quæro quantum quilibet habeat? Pono primum habere 1ρ; secundũ, & tertium 1A. Si ergo secundus, & tertius primo $\frac{1}{3}$ suæ pecuniæ dederint, habebit primus 1ρ $+\frac{1}{3}$A: quæ erunt æqualia his 100; & si ab vtraque parte tollatur 1ρ hæc $\frac{1}{3}$A, his $100-1$ρ: quare & 1A, his $300-3$ρ. Ergo secundus, & tertius, qui ponebantur habere 1A, habent $300-3$ρ: ergo omnes tres habent $300-2$ρ. Ponatur secundus habere 1B: quo subtracto ex $300-2$ρ, restant $300-2$ρ -1B, pecunia primi, & tertij, cuius $\frac{1}{4}$ addita ad pecuniã secundi, facit $\frac{3}{4}$B $+75-\frac{1}{2}$ρ. quæ sunt æqualia his 100; & si ab vtraq; parte tollantur 75, hæc $\frac{3}{4}$B $-\frac{1}{2}$ρ, his 25. Si rursus vtriq; parti addatur $\frac{1}{2}$ρ, hæc $\frac{3}{4}$B, his $25+\frac{1}{2}$ρ: ergo & 1B, his $\frac{2}{3}$ρ $+33\frac{1}{3}$: secundus ergo, qui ponebatur habere 1B, habet $\frac{2}{3}$ρ $+33\frac{1}{3}$.

Ponatur tertius habere 1C: ergo primus, & secundus habent $300-2$ρ -1C; cuius $\frac{1}{5}$ cum 1C, facit $\frac{4}{5}+60-\frac{2}{5}$ρ, æqualia his 100. Si ab vtraque parte tollantur

tur 60, erunt & hæc $\frac{4}{5}$c $-$ $\frac{2}{5}$ ℞, his 40 æqualia. Si vtrique parti addantur $\frac{2}{5}$ ℞, hæc $\frac{4}{5}$c, his $\frac{2}{5}$ ℞ $+$ 40: ergo & 1c, his $\frac{1}{2}$ ℞ $+$ 50. Tertius ergo, qui ponebatur habere 1c, habet $\frac{1}{2}$ ℞ $+$ 50. Cum ergo primus habeat 1 ℞, secundus $\frac{2}{3}$ ℞ $+$ 33$\frac{1}{3}$, habebunt omnes tres 2$\frac{1}{6}$ ℞ $+$ 83$\frac{1}{3}$; sed & habent 300 $-$ 2 ℞. Hæc ergo 2$\frac{1}{6}$ ℞ $+$ 83$\frac{1}{3}$, his 300 $-$ 2 ℞ sunt æqualia: & si vtriq; parti addantur 2 ℞, hæc 4$\frac{1}{6}$ ℞ $+$ 83$\frac{1}{3}$, his 300. Rursus si ab vtraque parte tollantur 83$\frac{1}{3}$, hæc 4$\frac{1}{6}$ ℞, his 216$\frac{2}{3}$. Diuisis ergo 216$\frac{2}{3}$ per 4$\frac{1}{6}$ ℞, proueniunt 52, pecunia primi: secundus ergo, & tertius, qui inuenti sunt habere $\frac{2}{3}$ ℞ $+$ 33$\frac{1}{3}$, & $\frac{1}{2}$ ℞ $+$ 50, habent 68, 76. Quæstionem legitime solutam esse facile probabis.

Tertium. Duo habent pecunias. Primus dicit secundo, si dederis mihi $\frac{1}{3}$ tuæ pecuniæ, habebo 110 aureos: secundus dicit primo, si dederis tu mihi $\frac{1}{4}$ tuæ, habebo 110: Quæro quot quilibet habeat? Pono primum habere 1 ℞, secundum 1 A. Si ergo secundus dederit primo $\frac{1}{3}$A, habebit primus 1 ℞ $+$ $\frac{1}{3}$A, hoc est 110. igitur facta reductione, erunt $\frac{1}{3}$A, & 110 $-$ 1 ℞ æqualia: ergo 1 A, & 330 $-$ 3 ℞. Quare secundus, qui ponebatur habere 1 A, habet 330 $-$ 3 ℞. Cui si primus dederit $\frac{1}{4}$ ℞, habebit secundus 330 $-$ 2$\frac{3}{4}$ ℞, hoc est, 110: facta ergo reductione erunt 220, & 2$\frac{3}{4}$ ℞ æqualia. Quare diuisis 220 per 2$\frac{3}{4}$ ℞ proueniunt 80, pecunia primi: ergo secundus, qui inuentus est habere 330 $-$ 3 ℞, habebit 90. Quæstionem rectè solutam esse patet.

Quartum. Dentur tres numeri, hac lege, vt primus & tertius habeant proportionem duodecuplam ad secundum; secundus verò & tertius ad primum quindedecuplam; quæro qui ſint numeri? Eſto primus 1℞, tertius 1A; ſumma 1℞+1A eſt duodecupla ſecundi: ergo ſecundus eſt $\frac{1℞+1A}{12}$, cui ſi addo tertium 1A, efficio $\frac{1℞+13A}{12}$, qui numerus cum ſit quindecuplus primi 1℞: erunt 15℞, & $\frac{1℞+13A}{12}$ æqualia; & ſi ab vtraqe parte tollatur $\frac{1}{12}$℞, erunt $\frac{13A}{12}$, & $14\frac{11}{12}$℞ æqualia: Igitur cum $\frac{13A}{12}$ dent $14\frac{11}{12}$℞, dabit 1A, $13\frac{10}{13}$℞: ergo tertius, qui ponebatur 1A, erit $13\frac{10}{12}$℞, hic cum primo 1℞, facit $14\frac{10}{13}$℞, qui numerus cum ſit duodecuplus ſecundi, erit ſecundus $\frac{16}{13}$℞. Quare cum primi, & ſecundi ſit proportio, qualis eſt numerorum 13, & 16, tertius qui inuentus eſt $11\frac{10}{13}$℞, erit 179. Habemus ergo tres numeros 13. 16. 179, qui id quod propoſitum eſt præſtant. Idq́ue in terminis minimis; nam in maioribus alij eſſe poſſunt. Vt hi tres 26. 32. 358; & hi 130, 160. 1790. &c.

ANNOTATIO.

Hic notetur mirabilis natura numerorum. Nam ſi priores duos ſtatuas vnitate maiores, quam ſunt denominatores proportionis, ſemper inuenies primum, & ſecundum. Vt ſi ſint inueniendi tres numeri, hac lege, vt primus cum tertio ſit quadruplus ſecundi; ſecundus cum tertio quintuplus primi; erit primus 5, ſecundus 6. Tertius inuenitur, ſi vel ſecundus quadruplicetur, & ex producto auferatur primus; vel primus quintuplicetur, & ex producto auferatur ſecundus? Vtrum enim feceris, reperies 19, numerum tertium.

Sunt quædam quæſtiones, quæ facilius per primas, quam per ſecundas radices ſoluuntur. Prima. Quinque

que habent pecunias, omnes secluso primo 154; omnes secluso secundo 146: omnes secluso tertio 140. Omnes secluso quarto 160. Omnes secluso quinto 172. Quæro quantum quilibet habeat? Si ponamus primum habere 1℞, habebunt reliqui tanto plus, aut minus 1℞, quanto numeri à quibus excludũtur, superant, aut excedunt, numerum, à quo primus excluditur. Habebit igitur secundus 1℞ + 8, tertius 1℞ + 14, quartus 1℞ — 6; quintus 1℞ — 18: ergo omnes 5℞ — 2; sed & habent 1℞ + 154; cum enim primus habeat 1℞, & quatuor reliqui 154, habebunt omnes 1℞ + 154: sunt igitur 5℞ — 2, & 1℞ + 154, æqualia; & facta reductione, 4℞, & 156. Diuisis ergo 156 per 4℞, proueniunt 39 pecunia primi; habebit igitur secundus 47, tertius 53, quartus 33, quintus 21.

Secunda habetur apud Peletarium de radicibus secundis, quam & clarius habet habet pag. 345 suæ Algebræ. Quæ sic habet. Quærantur duo numeri, quorum quadrata faciant 340: duo verò numeri in se ducti, faciant $\frac{6}{7}$ maioris quadrati. Pono primum esse 1℞; erit igitur secundus $\frac{6}{7}$℞; quadrata vtriusque faciunt $\frac{85}{49}$q: sunt ergo 340, & $\frac{85}{49}$ æqualia. Facta diuisione, prodit quadratum maioris 196: igitur minoris erit 144, adeoque numeri ipsi 14 & 12.

Demonstratio pendet ex 4 secundi Eucl: Cum enim quod fit ex duobus numeris sit medium proportionale inter quadrata numerorum, erit vt quadratum maioris, ad id quod fit ex numeris, ita numerus maior ad minorem: ergo cum pono numerum maiorem 1℞, erit minor $\frac{6}{7}$℞.

ARTICVLVS V.

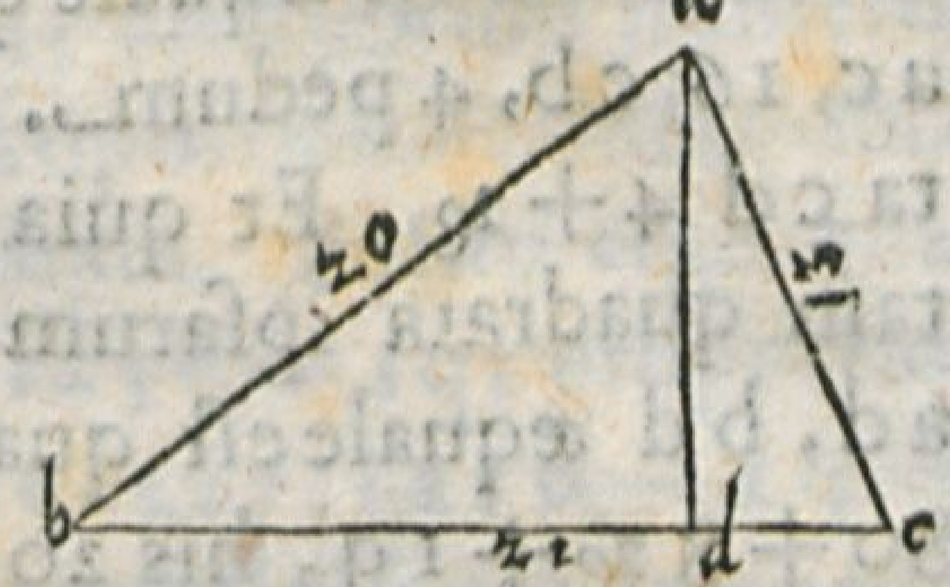
EXEMPLA GEOmetrica.

Primum, Est rectangulum, cuius maius latus est duplum minoris, minus 3 pedibus: area verò est 209 pedum quadratorum; quæro quanta sint latera? Pono minus esse 1℞: erit igitur maius 2℞ — 3; hæc in se ducta faciunt 2q — 3℞, quæ sunt æqualia his 209: & si vtrique parti addantur 3℞, hæc 2q his 209 + 3℞.

Diuisis igitur 209 + 3℞, per 2q, proueniunt $104\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}$℞. Semissis numeri radicum est $\frac{3}{4}$ eius quadratum $\frac{9}{16}$ additum ad absolutum, facit $105\frac{1}{16}$: ad huius radicem $10\frac{1}{4}$, additus semissis, conflat 11, latus minus: igitur maius est 19, tribus vnitatibus minus quam 22, duplum minoris.

Secundum. Est columna rectangula, cuius latera baseos habent proportionem duplam sesquiquintam altitudo verò tripla est lateris maioris; est columnæ crassities est pedum cubicorum 14520: quæro, quanta sint latera, & altitudo? Si ponatur minus latus 1℞; erit maius $\frac{11}{5}$℞, altitudo $\frac{33}{5}$℞. Ducta latera in se faciunt $\frac{11}{5}$q; hoc in altitudinem creat $\frac{363}{25}$ce crassitiem: igitur $\frac{363}{25}$ce sunt æqualia his 14520; quibus per $\frac{363}{25}$+ diuisis, proueniunt 1000, cuius numeri radix cubica 10, est latus minus: erit ergo maius 22, altitudo 66.

Tertium. Est triangulum abc, cuius latus maximum bc est 21, ab 20, ac 13 pedum. Quæro in quales partes perpendicularis ad lineam bc diuidat? Ponatur

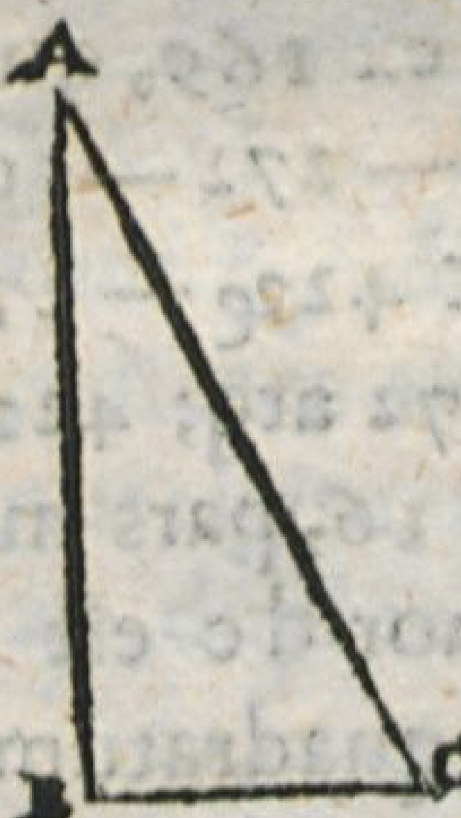


natur b d 1℞: erit igitur dc 21 — 1℞: Et quia per penult. primi Euclid. quadratum lateris a b ęquatur quadratis laterũ b d, a d. si subtraxero quadratum lateris b d ex quadrato lateris a b, restabit quadratum lateris a d. Eodem modo, si subtraxero quadratum lateris d c, ex quadrato lateris a c, restabit quadratum lateris a d. Igiturur si ex 400, quadrato ipsius a b, subtraxero 1 q, quadratum ipsius b d, restabit 400 — 1q, quadratum ipsius a d. Item si 441 — 42℞ + 1q quadratum ipsius d c, ex 169, quadrato ipsius a c subtraxero, restabit 42℞ — 272 — 1q, quadratum ipsius a d. Ergo 400 — 1q, & 42℞ — 272 — 1q sunt æqualia, & facta reductione, 672 atq; 42℞. Diuisis igitur 672 per 42℞, proueniunt 16, pars maior b d, quæ ponebatur 1℞: quare minor d c est 5. Quod verum esse hinc constat, quia si tam quadratum ipsius b d, ex quadrato ipsius a b; quam quadratum ipsius d c, ex quadrato ipsius a c subtraxero, restabit quadratum ipsius a d 144; ergo ipsa ad erit 12. pedum.

Quartum. Ad diametrum a b ducta est perpendicularis c e, quæ qualium diametrus est 20, talium ipsa est 8 pedum. Quæro in quas partes diametrus in c secta sit, quãtæ item sint b d, & d e. Quia quadratum perpendicularis c e est æquale rectangulo sub a c, c b contento per 13 sexti; si diuidatur a b ita, vt rectangulum sub partibus

 con-

contentum ſit æquale quadrato ipſius c e, inueniemus a c, 16; c b, 4 pedum. Ponatur b d 1℞: erit ergo tota c d 4 + 1℞. Et quia per penult. primi & 36 tertij. tam quadrata ipſarum c d, c e; quam rectangulum a d, b d æquale eſt quadrato tangentis d e, fit vt hæc 80 + 8 ℞ + 1 q, his 20 ℞ + 1 q ſint æqualia: & reductione facta, hæc 80, his 12 ℞. Diuiſis igitur 80 per 12 ℞, proueniunt $6\frac{2}{3}$, exterior b d, quæ poſita fuit 1℞: Ergo tota c d eſt $10\frac{2}{3}$, cuius quadratum $113\frac{7}{9}$, ſi quadrato ipſius c e iungatur, prodibit quadratum tangentis de, adeoque & ipſa tangens, $13\frac{1}{3}$ pedum.



Quintum. Trianguli a b c, rectanguli latus b c ſit 15; ſumma duorum, a c, a b, 75 pedum: quæro quanta ſint latera a b, a c? Pono a c eſſe 1℞: erit igitur a b 75 — 1 ℞. Quadrata laterum a b, b c æquantur quadrato lateris a c, per penult. primi. Eſt igitur hoc 1 q, his 5850 — 150 ℞ + 1 q æquale; & ſi vtrique parti addantur 150 ℞, hæc 1 q + 150 ℞, his 5850 + 1 q. Rurſus ſi ab vtraque parte tollatur 1 q, hæc 150 ℞, his 5850. Ergo, facta diuiſione, proueniunt 39 latus a c, erit igitur a b, 36.

Sextum. Dentur duo numeri, quorum quadrata faciant 1250, numeri verò in ſe ducti 527; quæro qui ſint numeri? Hæc quæſtio per 4. ſecundi ita ſoluitur. Rectangulum numerorum inueniendorum eſt 527: ergo duo rectangula ſunt 1054, quæ cum ſuma quadratorum faciũt 2304, qui numerus eſt quadratũ vtriuſq; numeri ſimul: eſt ergo vterq; ſimul 48. Qui ſi diuidatur in duas partes, ea lege, vt partes in ſe ductę faciant 527, erũt numeri reperti 31. 17.

Alia

Alia ſolutio. Per 4. ſecundi, eſt duorum numerorum rectangulum medium proportionale inter duorum illorum numerorum quadrata. Poſito ergo quadrato primi 1q, erit ſecundi 1250 — 1q; proportionales ergo ſunt hi tres numeri 1q 527. 1250 — 1q, & cum extremorum rectangulum ęquale ſit quadrato medij per 20 Sept. Euclid. erunt 1250q — 1qq, & 277729 æquales, factaque reductione, 1qq, & 1250q — 277729. Semiſſis numeri radicum eſt 625, ex cuius quadrato 390625, ſi abſolutus tollatur, propter ſignum —, reſtant 112896, cuius reſidui radix addita ſemiſſi numeri radicum conflat 961; ſubtracta relinquit 289. quorum numerorum radices quadratæ 31, & 17, ſunt numeri quæſiti. Sunt autem ex 961, & 289 radices quadratæ iterum extrahendæ, quod numeri radicum character fuerit hic q.

Septimum. Quærantur duo numeri, ex quorum quadratis ſi ſubtrahantur numeri ipſi, reſtent 320: ſi vero ei, quod ex numeris fit, rectangulo ijdem addantur, fiant 191: quæro qui ſint numeri? Ponantur numeri 1℞. Si ergo 1℞ addatur ad 320, prodeunt quadrata vtriuſq; 320+1℞: ſi vero 1℞ ſubtrahatur ex 191, reſtat vtriuſque rectangulum 191 — 1℞; cuius duplum 382 — 2℞, additum ad ſummam quadratorum, conflat quadratum vtriuſque numeri ſimul 702 — 1℞. Et cum vterque numerus ſimul poſitus ſit 1℞: erit 1q quadratum vtriuſque ſimul: ergo 1q æquale eſt hinc 702 — 1℞, cuius numeri radix quadrata 26, eſt ſumma vtriuſque ſimul, qui ſi diuidatur in duas

par-

partes, vt in se ductæ faciant 165 (nam si 26 ex 191 subtrahantur, restant 165) prodibunt partes 11, & 15.

ARTICVLVS VI.

EXEMPLA CONTRACTÈ *propoſita, & abſtractè ſoluta.*

Aliquid contractè proponere, est illud practicè, & materialibus rebus coniunctum proponere. Abstractè verò proponere aliquid, est illud à materialibus rebus separatum proponere. Rem exempla declarabunt.

Primum. Quidam herus suo famulo quot diebus, si laboret, mercedem 12, si ocietur multam 8 cruciferorum imponit. Anno finito, nec herus famulo aliquid dat, nec famulus ab hero aliquid recipit. Quæro quot diebus laborarit, quot feriatus fuerit? Hæc quæstio abstractè sic proponitur. Diuidatur numerus 365 (tot enim dies annus habet) in duas Partes, vt altera ducta in 12, tantum faciat, quantum altera ducta in 8. Ponatur prior 1℞; erit ergo posterior 365 — 1℞. Si illa in 12; hæc in 8 ducatur, erunt producta 12℞, & 2920 — 8℞, æqualia: igitur reductione, atque diuisione facta, proueniunt 146 dies laboris, qui ex 365 subtracti, relinquunt 219 dies ocij.

Secundum. Hospes quidam vendidit 30 vrnas vini 210 aureis, quarum vrnarum aliæ habuerunt album, aliæ rubrum vinum: vendidit autem vnam vrnam vini albi 5; vnam rubri 8 aureis. Quæro quot vrnæ fuerint

rint albi, quot rubri vini? Hæc quæſtio abſtractè ſic proponitur. Diuidatur numerus 30 in duas partes, vt ſi vna pars in 5, altera ducatur in 8, producantur 210. Ponatur pars prior 1ℛ: erit ergo altera 30 — 1ℛ Si illa in 5; hæc in 8 ducatur, producuntur 5ℛ, & 240 — 8ℛ, quæ addita conflant numerum hunc 240 — 3ℛ, æqualem huic 210. Facta iam reductione & diuiſione proueniunt 10, vrnæ vini albi: erunt ergo vini rubri vrnæ 20. Nam quinquies 10, faciunt 50: octies vero 20 faciunt 160, quæ ſimul faciunt 210.

Tertium. Sunt duo genera monetarum numero 1000, valentium au. 80: quorum alterius generis 10, alterius 20 valent vnum aureum. Quæro quot ſint quarum 10, quot quarum 20 vnum aureum valent? Hæc quæſtio abſtractè ſic proponitur. Diuidatur numerus 1000 in duas partes, vt ſi vna per 10, altera diuidatur per 20, faciant duo illi quoti 80. Poſita priore parte 1ℛ, erit altera 1000 — 1ℛ. Diuiſa illa per 10; hæc per 20, proueniunt $\frac{1ℛ}{10}$, & $50 - \frac{1ℛ}{20}$, quæ ſimul faciunt $50 + \frac{1ℛ}{20}$. Sunt ergo hæc $50 + \frac{1ℛ}{20}$, his 80 æqualia. Facta reductione, & diuiſione, proueniunt 600, pars prior, erit ergo altera 400. Si enim 600 per 10; 400 per 20 diuidantur, proueniunt 60, & 20, quæ faciunt 80.

Quartum. Duæ ciuitates diſtant 228 milliaribus, ex quibus duo tabellarij exeunt, occurrentes ſibi 12 die, conficitque quotidie prior vno milliari amplius, quam ſecundus; quæro quot milliaria quilibet quot diebus conficiat? Hæc quæſtio abſtractè ſic proponi poteſt. Quærantur duo numeri, quorum exceſſus ſit 1, vt ſi vterq; ducatur in 12, fiat ſumma productorum hæc 228.

Nu-

Numeri sunt 1℞ & 1℞ — 1: qui ducti in 12 faciunt 12℞, & 12℞ — 12; horum summa 24℞ — 12, est æqualis his 228. Facta reductione, & diuisione reperitur maior 10; ergo minor 9; quare prior quot diebus 10, alter 9 milliaria conficit.

Quintum. In qualibet duarum militarium turmarum, quarum altera alteram 300 militibus superat, distribuuntur 4000 aurei, & capit quilibet minoris turmæ 3 aureis amplius, quam quilibet maioris: quæro quot in qualibet turma sint milites? Hæc quæstio abstractè sic proponi potest. Diuidatur numerus 4000 per duos, quorum minor à maiore excedatur numero hoc 300, sitque quotus prioris diuisionis maior quoto posterioris, numero hoc 3, Posito diuisore minore 1℞: erit maior 1℞ + 300, per quos si diuidatur numerus 4000, prouenienr $\frac{4000}{1\,\text{℞}}$. & $\frac{4000}{1\,\text{℞}+300}$. Et quia quotus prior posteriorem superat hoc numero 3, addenda sunt posteriori 3, vt fiant $\frac{3\,\text{℞}+4900}{1\,\text{℞}+300}$. Sunt ergo iam $\frac{4000}{1\,\text{℞}}$, & $\frac{3\,\text{℞}+4900}{1\,\text{℞}+300}$ æqualia; & si ad eandem denominationem reducantur, communisque denominator abiiciatur, 3q + 3900℞, & 4000℞ + 1200000. Reductione igitur, & diuisione factis, proueniunt 400000 — 300℞, cuius numeri radices sunt 800, & 500, turmæ militum; nam si 4000 per illas diuidantur, proueniunt 5 & 8, quorum posterior priorem excedit 3, excedit quoq; maior turma minorem 300 militibus, & capit quilibet maioris turmæ 5, quilibet minoris 8 au. vt quæstio voluit.

Sextum. Quidam emptis 100 vlnis panni rogatur quanti vnam vlnam emerit? Respondet, quanto minoris emi 40 vlnas, quam 80 aureis, tanto minoris

noris emissem 50 vlnas, quam 95 aureis. Hæc quæstio abstractè sic proponitur. Quæratur numerus, qui si ducatur in 40, & 50, atque ex productis reijciantur 80, & 95, residua sint æqualia, quæro qui sit numerus? Ponatur numerus ille 1ꝛ, qui ductus in 40, & 50, facit 40ꝛ, & 50ꝛ; ex quibus si demantur 80. & 95, restans 40ꝛ — 80, & 50ꝛ — 95, quæ sunt æqualia. Reductione, & diuisione factis, proueniunt $1\frac{1}{2}$, atque tanti emit vnam vlnam. Si enim vna constat $1\frac{1}{2}$ aureis constabunt 40, aureis 60, & 50, au. 75. Cum itaque & 60 minus sint quam 80; & 75 minus quam 95, aureis 20, bene operati sumus.

Septimum. Sunt duæ societates, quarum altera alteram excedit 16 socijs, in quarum quamlibet summa pecuniæ distribuitur 688 aureis maior, quam sit vtriusque societatis numerus, capitque quilibet minoris societatis 8 aureis amplius, quam quilibet maioris. Quæro & quanta sit pecuniarum summa, & quot in qualibet societate socij? Ponatur societatis minor 1ꝛ, erit igitur maior 1ꝛ+16: vtraque addita aureis 688, facit summam pecuniæ distribuendæ, hanc 2ꝛ+704. Iam abstractè sic propono quæstionem. Diuidatur numerus 2ꝛ+704 per 1ꝛ, & 1ꝛ+16, vt quotus ex 1ꝛ proueniens, maior sit quoto, ex 1ꝛ+16 proueniẽte, numero hoc 8. Quoti sunt $\frac{2ꝛ+704}{1ꝛ}$, & $\frac{2ꝛ+704}{1ꝛ+16}$, & cum prior superet posteriorem octonario, si posteriori addantur 8, erunt hæc $\frac{2ꝛ+704}{1ꝛ}$ his $\frac{10ꝛ+832}{1ꝛ+16}$ æqualia; & reductis ad eandem denominationem, sublatoque communi denominatore, hæc 10q+832ꝛ, his 2q +736ꝛ+11264, cuius radix 32, est societas minor: erit igitur maior 48. Hæ societates cum 688 aureis faciunt

unt 768, summam pecuniarum, quæ per 32 diuisa, reddit 24; per 48 duntaxat 16; habet ergo quilibet minoris societatis 8 aureis amplius, quam quilibet maioris.

INSTITVTIONVM ARITHMETICARVM.

Liber Tertivs.

De Numeris Irrationalibus absolutis.

Numeri irrationales absoluti, sunt radices eorum rationalium absolutorum, qui radices rationales non habent. Exempli causa. Radix quadrata numeri 16, non est irrationalis, sed rationalis, est enim 4. Nec radix cubica numeri 27, est irrationalis, sed rationalis, est enim 3. Nec denique radix supersolidi primi numeri 32, est irrationalis, sed rationalis, est enim 2. At radix quadrata numeri 6, irrationalis est, siquidem numerus 6 non est quadratus. Et radix cubica numeri 20, irrationalis est, cum 20 non sit numerus cubicus. Denique radix supersolidi primi numeri 40, est irrationalis, quod 40 non sit numerus supersolidus. Signantur numeri irrationales, siue radices surdæ hoc modo, √q6, √ce20, √ß40. Primus significat radicem quadratam, ex 6. Secundus radicem cubicam, ex 20. Tertius radicem supersolidam primam ex 40. Iisdem igitur chara-

characteribus notantur irrationales, quibus coſſici rationales; niſi quod irrationalibus characteres cum hoc ſigno √ præfigantur, coſſicis poſtponantur.

Numeri irrationales abſoluti, ſiue radices ſurdæ, diuidi poſſunt in ſimplices, & compoſitas. Simplices à pleriſque mediales, quod per illas, inter duos numeros, quotcumque medij proportionales inueniri poſſint. Compoſitæ dicuntur, quod ſignis hiſce +, — copulentur, & disiungantur. Diuiduntur compoſitæ in ligatas, vniuerſales, & diſtinctas. Ligatæ ſunt in quibus particulæ coniunctim accipiuntur. Exemplum in numeris rationalibus hoc eſto. √q36+√q16, quæ faciunt 10. Nam radix ex 36, eſt 6; radix verò ex 16, eſt 4: ſed 6 & 4, faciunt 10, quorum quadratum eſt 100.

Radix vniuerſalis eſt, quando primus character vtramque particulam afficit, qui à particulis puncto, aut parentheſi ſeiungitur hoc modo. √q.22+√q9; aut hoc. √q(22+√q9.) Nam radix ſecundæ particulæ, √q9, eſt 3, quæ addita ad 22, particulam primam, facit 25, cuius radix eſt 5: totus ergo hic numerus √q(22+√q9) valet 5.

Diſtinctæ, quas quidam adferunt, ſunt eædem cum ligatis, niſi quod in illis particulæ ſeparatim accipiuntur, vt in exemplo de ligatis allato, √q36+√q16, particulæ non accipiuntur coniunctim, ſed ſeparatim, faciunt enim 6, & 4; non, vt in ligatis, 10.

Nos, hac diuiſione miſſa, illos numeros irrationales, in quibus primus character non vtramq; particulam afficit, vocabimus compoſitos, & diminutos: In quibus vtramq; afficit, vniuerſales.

Dicuntur à quibuſdam omnes numeri irrationales

K con-

constantes duabus particulis, & signo +, binomia. Cõstantes duabus, & signo —, residua, siue apotomæ. Cõstantes verò tribus particulis, & signis quibuscumque, trinomia; constantes quatuor, quadrinomia.

Disputari etiam hoc loco solet sintne radices irrationales, numeri an non. Sed numeros esse, duo argumenta suadent. Primum est, quod ex duobus irrationalibus produci possit rationalis, vt ex √q5 in √q20. fit 10. Alterum est, quod, vt inter duos numeros continuos, vt inter 2 & 3, infiniti cadunt fracti; ita inter eosdem infiniti cadere possint irrationales, cuiusmodi sunt √q5. √q6. √q7. √q8. √q9. √q10. √q11. √q12. &c.

CAPVT I.

In hoc cap. primo tradam elementa simplicium; secundo compositorum, & diminutorum, tertio vniuersalium.

ARTICVLVS I.

DE ADDITIONE ET *subtractione irrationalium simplicium.*

Simplices irrationales, aut sunt cõmensurabiles, aut incommensurabiles. Item, aut habent eosdem, aut diuersos characteres. Si habent diuersos ad eosdem ante operationem reducendi sunt, hoc qui sequitur, modo.

Simplices irrationales diuersos habentes characteres, ad eosdem reducere.

Collocentur numeri supra, characteres infra, vt hic apparet: deinde per crucem fiat multiplicatio talis, qualem character indicat. Postremo vtriq;

triq; producto vterq; character præfigatur. Exemplum. Sint ad eosdem characteres reducendi hi duo numeri √ce 16, & √q8. Collocatione facta, multiplicētur 16 quadratè propter characterem √q per crucem ei respōdentem: 8 cubicè propter eandem causam, & producentur 256, & 512, quibus præfigatur vterq; character hoc modo √qce 512 + √qce 256.

His expositis ad elementa reuertimur. Ac qrimo quidē, si habeant diuersos characteres reuocētur ad eosdē, ac tunc si fuerint incōmensurabiles addantur per +, subtrahantur per —. Quamquam non sit necesse ad eosdē illos characteres reducere, possunt. n. non reducti addi. Vt si √q8 ad √ce12, addenda sint, fient √q8 + √ce12. Si √q8 ex √ce12 subtrahenda, restabunt √ce12 — √q8.

Si habeant eosdem characteres, & incōmensurabiles sint, adduntur quoq; per +, subtrahuntur per —. Vt si √q 11, ad √q13, addenda sint, fient √q11 + √q13. Si √q11 ex √q13 subtrahenda restabunt √q13 — √q11. Possunt tn̄ radices incōmensurabiles quadratę per 4. secundi Eucli. addi. Si nimirū ad sum̄am quadratorum, addatur duplū eius, quod ex ipsis gignitur. Vt si √q11 & √q13 addenda sint. Summa quadratorū est 24. (Nam quadratum irrationaliū, aut cubus, &c. habetur si ab ipsis character quadraticus, aut cubicus &c. tollatur, ita fit, vt horum duorū √q11, √q13, quadrata sint 11 & 13, summa vtriusq; 24) Id quod ex ipsis fit, √q143, eius duplū √q572: ergo summa √q(24 + √q572.) Subtractio fit, si ex summa quadratorum, subtrahatur duplum eius, quod ex ipsis nascitur, hoc modo. √q (24 — √q572.)

Si sint cōmensurabiles, hoc est, si diuisi per aliquam communem mensuram, quotos reddant quadratos, cubicos, biquadratos &c. sic addūtur. Quotorum radices adduntur, summa ad quadratum, cubum, biquadratum, &c. ducitur: quadratum, cubus, biquadratum, &c. ducitur in communem mensuram, & habetur summa. In subtractione radix quoti minoris subtrahitur ex radice maioris, residuum ducitur ad quadratum, cubum &c.

Exemplum. Sint addenda √q27, & √q12. Diuisa per 3, communem mensuram, reddunt quotos quadratos 9 & 4, quorum radices 3, & 2 iunctæ faciunt 5, huius quadratum 25 ductum in 3 producit √q75, summam. Si √q12, ex √q27 subtrahenda sint, subtrahitur radix minor 2, ex maiore 3, & restat, 1 cuius quadratum 1, ductum in 3, facit √q3, residuum.

Secundum exemplum. Sint hi tres numeri √q20, √q45, √q80 addendi: diuisi per 5 reddunt quotos quadratos 4, 9, 16: quorum radices 2, 3, 4 iunctæ faciunt 9, huius quadratum 81, ductum in 5, producit √q405, summam omnium.

Tertium exemplum. Sint hi √ce108, √ce32 addendi. Diuisi per 4 reddunt quotos cubicos 27, 8: summa radicum est 5, cuius cubus 125 ductus in 4 producit √ce500 summam. Sint iam √ce108, ex √ce500 subtrahenda. Diuisa per 4, reddunt 27, 125, quotos cubicos, quorum radices sunt 3, & 5; subtracta illa ex hac, relinquit 2, cuius cubus 8 ductus in 4, producit √q32. residuum.

Quando duo similes adduntur, multiplicatur vnus eorum per 4: quando tres, per 9; quando quatuor, per 16, &c. Vt si sint √q12, & √q12 addendi, ducitur √q12 in 4, vt fiant √q48. vtriusque summam. Si tres √q12, √q12, √q12 sint addendi, ducitur √q12 in 9, & fit summa hæc √q108, &c.

Arti-

ARTICVLVS II.

DE MVLTIPLICATIONE, & diuisione simplicium.

Primò, quando multiplicantes eosdem habent characteres, ducuntur numeri in se, retento communi charactere. Vt si √q20 ducenda sint in √q18, producuntur √q360. Si √ce12 in √ce18, producuntur √ce216, hoc est, 6, quia 216 est numerus cubicus, & eius radix 6.

Secundò. Si rationalis in irrationalem sit ducendus, reducendus est prius rationalis ad speciem irrationalis, vt ad quadratum, cubum, biquadratum &c. prout irrationalis habuerit characterem √q aut √ce, aut √qq, &c. Vt si ducenda sint √q32 in 8, ducenda prius sunt 8 ad quadratum, ac deinde √q32 in √q64 ducenda, vt producantur √q2048. Si 6 in √ce12, ducenda sunt 6 ad cubum √ce216. Deinde √ce12 in √ce216 ducenda, vt producantur √ce2592.

Eodem modo si 8 diuidenda sint per √q4, ducenda sunt 8 ad quadratum, ac deinde √q64 per √q4 diuidenda, vt proueniant √q16, hoc est, 4. Item si diuidenda sint 12 per √q8, diuidantur √q144, per √q8, proueniant √q18.

Tertiò. Si multiplicantes: vel diuidendus, & diuisor habeant diuersos characteres, ad eosdem ante operationem reuocandi sunt. Sint √ce16 per √q8 multiplicandi. Reducti ad eosdem characteres, faciunt √qce

 512

512 + √qce256. Hos in se ducto, & produces √qce131072. Sit quoque √ce8000 per √q16 (hoc est per 4) diuidendus. Reducti ad eosdem characteres, faciunt √qce64000000, & √qce4096. Diuiso illo per hunc, prodeunt √qce15625, cuius radix quadrata est 125; huius cubica 5. Diuisis ergo √ce8000 per √q16, proueniunt 5.

Quartò. Quando numerus quadratè, cubicè, biquadratè, &c. multiplicatur, tollitur character, & res est perfecta. Vt si √q8 sit quadrandus, fiunt 8: si √ce12 cubicè multiplicandus, fiunt 12: si √qq18 biquadratè, fiunt 18, &c. Simili modo radix quadrata numeri 8 est √q8. Radix cubica numeri 12, est √ce12. Radix biquadrata numeri 18, est √qq18.

ANNOTATIO.

INTER DVOS NVMEROS datos, quotcumque medios proportionales inuenire.

Primò, diuidatur maior datus per minorem.

Secundò, progressio geometrica ab vnitate incipiens instituatur, terminos habens duobus amplius, quam quot sunt medij inueniendi, cuius progressionis denominator sit quotus antea inuentus.

Tertiò, ex terminis inuentis extrahantur radices. Quadrata quidem, si vnus duntaxat medius sit inueniendus; cubica si duo; biquadrata si tres; supersolida prima, si 4, &c.

Quartò, radices inuentæ ducantur in minorem numerum datum.

Exem-

Exemplum. Sint inter 3, & 768 tres medij proportionales inueniendi. Diuisis 768 per 3, proueniunt 256. Primus ergo progressionis terminus est, 1. Secundus 256 tertius 65536, quartus 16777216, quintus 4294967296. horum terminorum radices quadratæ sunt 1. 4. 16. 64. 256. quæ ductæ in minorem numerum datum 3, producunt 3. 12 48. 192. 768. Sunt ergo hi tres termini 12. 48. 192, inter extremos datos 3 & 768 medij proportionales.

Aliud exemplum. Sint inter 4 & 12 quatuor medij inueniendi. Diuisis 12 per 4, proueniunt 3. Progressio sex terminorum hæc est 1. 3. 9. 27. 81. 243. Horum terminorum radices supersolidi primi sunt. 1. √ß3. √ß9. √ß27. √ß81. 3. Quæ ductæ in datum numerum minorem 4, producũt 4. √ß3072. √ß9216. √ß27648. √ß82944. 12. Debent autem √ß3. √ß9, &c. non in 4: sed in eius supersolidum primum, nimirum in 1024 duci, vt ex dictis manifestum est. Quando inter duos datos vnus tantum medius proportionalis inueniendus est, ducuntur dati in se, & ex producto radix quadrata extrahitur.

ARTICVLVS III.

DE ADDITIONE, ET *subtractione compositorum, & diminutorum.*

Si, quæ de Additione, & subtractione cossicorum rationalium circa signa +, & —. Item de additione & subtractione simplicium irrationalium, dicta sunt, probè intelligantur, nulla hic difficultas erit. Nam & hic regulæ illæ locum habent.

Prima. *Eadem signa idem signum ponunt, nisi in subtractione, quando numeri præposterè ponuntur, tunc enim subtrahitur superior ab inferiore, & ex + fit —; & ex — fit +.*

Secunda. *Diuersa signa mutant speciem operationis, & in additione ponitur signum maioris numeri; in subtractione verò superioris, siue maior is sit, siue minor, siue æqualis.*

Exemplum Additionis. In hoc exemplo duo priores numeri adduntur, vt de simplicibus dictum est. Duo secundi, vt rationales cossici. Duo tertij mutant speciem operationis, hoc est pro Additione fit subtractio. Duo quarti cum sint diuersorum nominum, addi non possunt nisi per signum +; sed adduntur simul quartus superioris, & vltimus inferioris ordinis, quod vterque sit rationalis. Item quartus inferioris, & vltimus superioris ordinis, quod eosdem characteres gerant. Iam verò, quia √q162 & √q72 sunt eiusdem generis, geritque √q162 signum +: √q72 verò signum —, fit, vt si hic ex illo subtrahatur, restent √q18. Item, quia 10 gerit signum —; 16 verò +, fit, vt si 10 ex 16 tollantur, supersint 6. Summa ergo omnium est √q18+6+√ce3.

√q50 + 20 — √ce24 + 12 — √q8
√q32 — 30 + √ce81 — √q32 + 4
√q162 — 10 + √ce3 + 16 — √q 2
√q18 + 6 + √ce3.

Exemplum subtractionis. Duo secundi mutant speciem operationis, hoc est, √q18 & √q50 adduntur, retento signo superioris. Tertius superioris subtrahitur à quar-

√q50 + √q18 + 8 — √q27 + √q48
√q18 — √q50 — √q12 + 10 + √q108
√q8 + √q128 — 2 — √q3 — √q12
√q200 — √q27 — 2.

quarto inferioris ordinis, & mutatur + in —, iuxta primam regulam. Tertius inferioris subtrahitur à quarto superioris ordinis. & restant √q 3. Subtrahitur denique vltimus superioris ab vltimo inferioris, & mutatur + in —, iuxta primam regulam. Quia verò √q 8, & √q 128, faciunt √q 200; Et — √q 3, atque — √q 12, faciunt √q 27, fit, vt restent √q 200 — √q 27 — 2.

ARTICVLVS IV.

DE MVLTIPLICATIONE, & diuisione compositorum, & diminutorum.

Multiplicatio irrationalium compositorum, & diminutorum, fit per omnia, sicut simplicium, dummodo circa signa regula de multiplicatione cossicorum rationalium tradita, seruetur, quæ sic habet

Eadem signa ponunt +, Diuersa —. Addo vnicum exemplum. Sint 18 + √q 54, in 6 — √q 24 ducenda. Duco 6 in 18, & produco 108. Secundo, duco 6 in √q 54, & produco √q 1944. Tertio duco — √q 24 in 18, & produco — √q 7776. Quarto duco — √q 24, in √q 54, & produco — √q 1296, hoc est — 36. quæ ex 108 subtracta, relinquunt 72. Subtracta verò √q 1944 ex — √q 7776, relinquunt — √q 1944.

18 + √q 54
6 — √q 24
108 + √q 1944 — √q 7776 — √q 1296
72 — √q 1944.

Notetur, quando numeri multiplicantes, diuersos habent characteres, eos ante operationem ad eosdem esse reuocandos, vt de multiplicatione simplicium diximus. Multiplicatio hæc desumpta est ex 4. sec. Euclid.

De diuisione multa dici possent; sed paucis me expedio. Aut enim diuisor est simplex, aut compositus. Si simplex, per illum singulæ diuidendi particulæ sunt diuidendæ, siquidem eosdem cum diuisore habeant characteres. Si diuersos, ad eosdem ante operationem sunt reuocandæ. Exemplum. Sint √q48 + √q20 per √4q diuidenda. Diuisis √y48 per √q4 proueniunt √q12. Diuisis vero √q20 per √q4, proueniunt √q5. Si vero √q200 — √ce80, per 2 sint diuidenda, prouenient √q50 — √ce10. Diuisis enim √q200 per 2, hoc est per √q4, proueniunt √q50; diuisis verò √ce80 per 2, hoc est, per √ce8, proueniunt √ce10.

Sint iterum diuidenda 12 + √ce128, per √q8. Diuide 12, hoc est √q144 per √q8, & prouenient √q18. Diuide quoque √ce128, per √q8. Sed quia diuersos habent characteres, ad eosdem reducantur, ac deinde √qce16384, per √qce512 diuidantur, & prouenient √qce32.

Si diuisor sit compositus, sintque particulæ radices quadratæ, aut biquadratæ, reducendus est diuisor ad simplicem, hoc modo.

Signum posterioris particulæ + mutetur in —; & — in +; atque in diuisorem hoc modo mutatum, ducatur tam diuidendus, quam diuisor, vt producantur noui, diuidendus, & diuisor.

Exemplum, Sint 60 per √q18 + √q8 diuidenda. Duc tam 60, quam √q18 + √q8, in √q18 — √q8, & producenducetur hic nouus diuidendus $\surd q\,64800 - \surd q\,28800$; siue $\surd q\,7200$: & hic nouus diuisor 10. Diuisis ergo $\surd q\,7200$ per 10, siue per $\surd q\,100$, proueniunt $\surd q\,72$.

Si diuisor habeat tres particulas quadratas, aut biquadratas, mutetur particulæ vltimæ signum + in —; & — in +, inque diuisorem hoc modo mutatum, ducatur tam diuidendus, quam diuisor. Quo facto, si diuisor fuerit simplex, benè quidem. Si compositus alia reductione opus erit.

Exemplum. Sint 120 diuidenda per $\surd q\,50 + \surd q\,32 + \surd q\,18$, ducantur, tam 120, quam $\surd q\,50 + \surd q\,32 + \surd q\,18$, in $\surd q\,50 + \surd q\,32 - \surd q\,18$, & producentur $\surd q\,720000 + \surd q\,460800 - \surd q\,259200$, hoc est, $\surd q\,1036800$, nouus diuidendus, & 144, nouus diuisor. Diuisis ergo $\surd q\,1036800$ per 144, hoc est, per $\surd q\,20736$, proueniunt $\surd q\,50$.

Pro radicibus cubicis, supersolidis, & alijs, vide Algebram Clauij cap. 23.

ARTICVLVS V.

DE VNIVERSALIVM *calculo.*

Hic priori loco de multiplicatione, & diuisione agendum est. Multiplicaturus ergo numerum quemcunque vniuersalem irrationalem in alium, duc ante operationem vtrumq; multiplicantem ad quadratum, aut cubum, &c.

Exemplum. Volo multiplicare $\surd q\,(21 + \surd q\,16)$ hoc est 5, per 7. Quadratū multiplicandi est $21 + \surd q\,16$ (tollitur enim

enim duntaxat qui est ante parenthesin character) multiplicantis 49. Ductis ergo 21+√q16, in 49, proueniunt 1029+√q38416, hoc est, 35: nam radix quadrata posterioris particulæ 196 addita priori, efficit 1225, cuius radix est 35.

Quando radix quadrata in suum residuum ducitur: ita agito. Connecte illa signo + idq; duplici positu. Deinde vtriusque quadratum simul iunge, cum eorum rectangulo bis sumpto per 4. sec. Eucl. Exemplum. Sint √q(10+√q24) in √(10−√q24) ducenda. Connecte illa signo +, & bis pone, vt in formula vides:

√q(10+√q24)+√q(10−√q24)
√q(10+√q24)+√q(10−√q24)
10+√q24+ 10−√q24
20+√q304

Deinde quadra vtramq; particulam, hoc est, tolle characterem ante parēthesin positum, & reperies 20: nam 10 & 10 faciunt 20. At √q24, & −√q24. Se mutuo tollunt, propter diuersa signa + & −. Postremo multiplica √q(10+√q24), in √q(10−√q24) per 4. sec. Eucl. vt hic vides.

√q(10+√q24)
√q(10−√q24)
100−24
100
24
76

Nam particularum quadrata sunt 100 & 24. At verò 10 in +√q24 facit √q2400: 10 autem in −√q24, facit −√q2400, quæ se mutuo tollunt, propter diuersa signa. Subtractis tandem 24 ex 100, restant 76: cuius duplum, est 304: Ergo quod ex multiplicatione √q(+√q24) in √q(10−√q24) fit, est 20+√q304. Duplicaui autem 76, propter duplicem positum.

In-

In diuisione reducitur, tam diuisor, quam diuidendus ad quadratum, postea fit diuisio, vt supra. Sint enim $\surd q(72+\surd q162)$ diuidenda per 3, quadrata sunt $72+\surd q162$, & 9. Diuisis ergo 72 per 9, proueniunt 8: diuisis verò $\surd q162$, per $\surd q81$, proueniunt $\surd q2$: ergo quotus est $\surd q(8+\surd q2.)$

Additio, & subtractio, fiunt per signa + & —; nam aliter fieri commode non possunt, nisi in binomijs & residuis, vbi per omnia fiunt, vt de multiplicatione binomiorum, & residuorum, iam iam diximus.

Nam si $\surd q(10+\surd q24)$ & $\surd q(10-\surd q24)$ addenda sint, fient per multiplicationem $20+\surd q304$, cuius radix $\surd q(20+\surd q304,)$ est eorum summa. Si vero $\surd q(10-\surd q24)$ ex $\surd q(10+\surd q24)$ sint subtrahenda, restant $20-\surd q304$, cuius radix $\surd q(20-\surd q304)$ est residuum.

ANNOTATIO DE FRACTIS.

De fractis hic nihil occurrit præcipiendum, sicut nec in superioribus, nisi quod eorum reductio, Additio, Subtractio, &c. per omnia fiant, vt de absolutis rationalibus dictum est, dummodo habeatur ratio signorum, & characterum.

ARTICVLVS VI.

DE BINOMIIS ET *residuis.*

Binomium est numerus rationalis constans duobus nominibus, potentia tantum cõmensurabilibus. Ab Euclide in 10 element. Sex duntaxat binomiorum, &

resi-

residuorum species recensentur. Tres priores fiunt, quando quadratum maioris nominis ad excessum supra quadratum minoris, est, vt numerus quadratus ad numerum quadratum. Tres posteriores, quando quadratum maioris nominis, ad dictum excessum, non est, vt numerus quadratus ad numerum quadratum. Primum binomium est, quando maius nomen est longitudine, minus potentia rationale.

Secundum, quando maius est potentia, minus longitudine rationale.

Tertium, quando vtrumque potentia est rationale.

Idem de quarto, quinto, & sexto intellige, vt hic cernis.

BINOMIA	APOTOMÆ
1. 3 + vq5.	1. 3 — vq5.
2. vq12 + 3.	2. vq12 — 3.
3. vq8 + vq6.	3. vq8 — vq6.
4. 5 + vq20.	4. 5 — vq20.
5. vq14 + 3.	5. vq14 — 3.
6. vq10 + vq7.	6. vq10 — vq7.

Sex binomiorum speciebus, respondent totidem residuorum, siue Apotomarum species. Vide plura apud Clau. in Alg. cap. 27.

ARTICVLVS VII.

DE RADICVM EXTRActione ex binomijs, & residuis.

Primò. Ex differentia quadratorum vtriusq; nominis extrahe radicem quadratam.

Secun-

Secundò. Radicem inuentam, tum maiori nomini adde, tum ab illo ſubtrahe.

Tertio. Radicem quadratam ſemiſſis illius ſummæ coniunge cum radice quadrata ſemiſsis illius relicti per ſignum +, ſi fuerit binomium. Diſiunge per —, ſi fuerit apotome.
Sit radix extrahenda ex hoc binomio 14+√q180. Quadrata particularum ſunt 196, & 180, differentia 16; differentiæ radix 4, quæ addita & ſubtracta maiori nomini conflat 18; relinquit 10. Horum ſemiſſes ſunt 9, & 5; ſemiſſium horum radices 3, & √q5. Quibus ſigno + connexis, reſultat radix quæſita 3+√q5. quam ſi duxeris in ſe quadratè, redibit. dictũ binomium 14+√q180. Si fuiſſet apotome hæc 14—√q180, debuiſſent particulæ ſic diſiungi, 3—√q5.

Demonſtratio pendet ex 4. prop. ſec. Eucl.

CAPVT II.

In hoc cap. exempla aliquot numerorum irrationalium abſolutorum per propoſitiones proponemus.

PROPOSITIO I.

NVMERVM DATVM proportionaliter ſecare.

Sit numerus 8 hoc modo ſecãdus. Coniunge quadrata totius numeri 8, & ſemiſſis 4; nẽpe 64, & 16 efficieſq; 80, ex cuius radice √q80, ſi ſubtraxeris ſemiſſem, habebis ſegmentum maius √q80 — 4; hoc ſegmentũ ſubtractũ ex toto numero, relinquit ſegmentũ minus 12 — √q 80. Hanc ſectionẽ veram eſſe, oſtenditur tum ex 11. ſec. Euclid. tum per additionẽ partium; tum per ductũ maioris ſegmẽti in ſe, & minoris in totũ. Nam ex additione ſeg-

ſegmentorum conflatur numerus totus 8; & tam ex ductu maioris in ſe; quam ex ductu minoris in totum, producitur hic numerus 96 — vq5120, qui eſt reſiduum primum, eius radix eſt vq80 — 4.

PROPOSITIO II.

DATA DIAMETRO CIRculi latera hexagoni, tetragoni, trigoni, pentagoni, octogoni, & decagoni inuenire.

Sit diametrus ab 12 pedum: erit igitur ſemidiameter bi, 6; & tantum etiam eſt latus hexagoni per 15. quarti Euclid. Diuidatur ſemidiameter bi in d bifariam, ducta recta dc, eritque di, 3 pedum: ergo dc erit vq45 per 47. primi. Nam eius quadratum 45, æquale eſt quadratis ipſarum di, ic; quarum hæc eſt 6; illa 3 pedum. Abſcindatur de, ipſi dc æqualis, ex qua ſi ſubtrahatur di, erit ie vq45 — 3, quæ eſt latus decagoni per 9. decimi tertij, cum be in i ſit ſecta proportionaliter per 11. ſec. Rurſus quia quadratum ipſius ce æquale eſt quadratis ipſarum ci, ie per 47. primi; erit ce, vq(90 — vq1620,) quæ eſt latus pentagoni per 10. decimi tertij. Latus tetragoni ac facile per 47 primi reperitur, eſt enim vq72. Latus denique

nique trigoni cf, erit per 12. decimi tertij √q108. est enim potentia triplum semidiametri bi per 12 duodec. Latus octogoni ak sic inuenitur. Cum ac sit √q72, erit al √q18, cui cum æqualis sit il, relinquet il ex ik subtracta kl, 6 — √q18. Notis ergo al, lk, erit ak, √q (72 — √q2592) latus octogoni.

PROPOSITIO III.

DATIS TRIANGVLI RECTANGULI DUOBUS LATERIBUS, LATUS TERTIUM, & AREAM INUENIRE.

Sit triangulum abc rectangulum, sitque latus ab 24 : bc 18 pedum: erit igitur per 47 primi, ac √q252. Et quia per 41 primi parallelogrammum cd duplum est trianguli acb, fit autem area parallelogrammi ex ductu laterum bc, ca in se: ergo area trianguli nascetur ex ductu lateris ac in semissem bc; vel contra, semissis lateris bc est 9 pedum: ductis ergo 9, hoc est √q81 in √q252, prouenit area trianguli √q20412. Sit secundo latus cb, √q216; ba √q24 erunt ergo eorũ quadrata 216, 24: ergo quadratum lateris ab, erit 240: ergo latus ipsum √q240.

Et quia ex ductu lateris ac in semissem lateris cb, vel contra, producitur area trianguli, & est semissis lateris bc, √q54, fit vt area trianguli sit √q1296, siue 36.

PROPOSITIO IV.

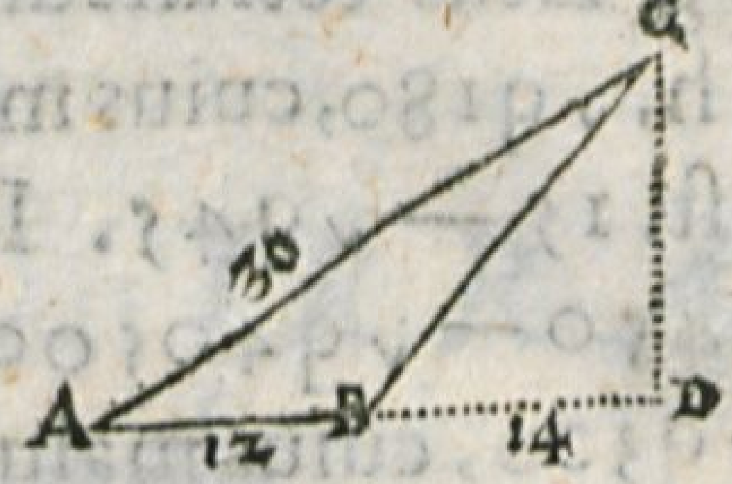
DATIS TRIANGVLI *æquilateri, vel isoscelis omnibus lateribus, aream inuenire.*

Sint trianguli æquilateri a b c omnia latera 10 pedum. Diuisa ergo basi a b in d bifariam, erit per 41. primi parallelogrammum d e, æquale triangulo a b c: area autem parallelogrammi creatur ex ductu lateris a d in latus d c: ergo & area trianguli a b c. In triangulo a d c rectangulo, latera a d, a c sunt nota, hoc 10, illud 5 pedum: erit igitur per 47 primi perpendiculum d c, √q75, quo ducto in latus a d, proueniunt √q1875, area trianguli a b c. Si basis a b statuatur √q80, erit area trianguli a b c √q1500. Nam semissis basis √q20 ducta in √q75 d c producit √q1500.

PROPSITIO. V.

DATIS TRIANGVLI *scaleni duobus lateribus, vna cum linea in directum basi ducta, in quam cadit perpendiculum ex angulo basi opposito demissum, aream inuenire.*

Sint trianguli a b c scaleni latera a c 30; a b 12 pedum: exterior linea b d 14. Sunt igitur in triangulo rectangulo a d c duo latera a c, a d nota; ac quidem 30; a d verò 26 pedum.

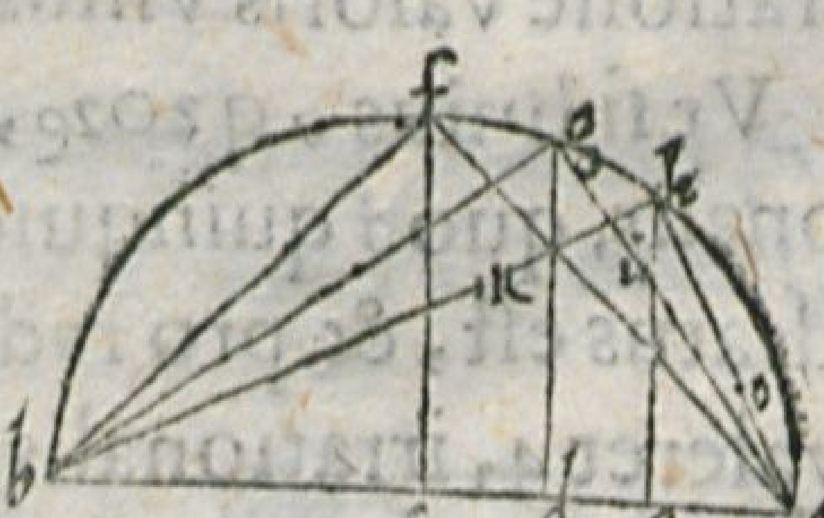


Quare c d erit √q224 per 47. primi; b c verò √q420. Et quia per 41 primi, triangulum a b c æquale est parallelogrammo sub d c, & semisse ipsius a b contento, si ducatur d c in 6, hoc est, √q224 in √q36, prouenient √q8064, area trianguli a b c.

Propositio VI.

Latera quinque corporum regularium eidem sphæræ inscriptorum, data sphæræ diametro inuenire.

Ponatur diametrus a b 30 partium, quæ diuidatur in c bifariam: in d ita, vt a d sit tertia; in e, vt a e sit quinta pars diametri. Ductis perpendicularibus f c, g d, h e, & iunctis b f, b g, b h; a f, a g, a h, diuidantur a h, a g proportionaliter in o; & i per 11 sec. & maius segmentum ipsius a h transferatur ex h in k, ducta a k.



Quo facto, erit b g latus tetrahedri, b f octahedri; a g cubi; a k icosahedri; a i dodecahedri. Posita namq; diametro 30 partiũ, erit d g, cũ inter a d, d b sit media ꝓportionalis, √q200;

bg latus tetrahedri. √q600; bf, √q450; ag √q300; ah, √q180, cuius maius segmentũ est æquale ipsi hk, quod est, 15 — √q45. Datis ergo ah, hk, dabitur & ak √q (450 — √q40500) latus icosahedri. Deniq; ag est √q300, cuius maius segmentum ai, √q375 — √q75, est latus dedocahedri. Videatur 18. propos. 13. Euclid.

INSTITVTIONVM ARITHMETICARVM.

Liber Quartus.

DE NVMERIS IRRATIONALIBUS COSSICIS.

NVmeri irrationales cossici duplici notantur charactere, hoc modo, √q20ℛ, quorum prior significat radicem quadratam ex 20, secundus 20 radices; ipse verò numerus sic pronunciatur. Radix quadrata viginti radicum. Possunt numeri irrationales cossici, pro ratione valoris vnius radicis, interdum esse rationales. Vt si huius √q20ℛ, vna radix valeret 5, esset ipse rationalis, quod quinquies 20 faciant 100, qui numerus quadratus est, & pro radice habet 10. Si vero vna radix valeret 4, irrationalis esset, quoniam √q80ℛ, qui ex 20 & 4 creatur, non est numerus quadratus. De his numeris duo breuiter pertractabo.

Primum est calculus, alterum vsus & praxis.

Caput

Caput I.

De calculo irrationalium coßicorum.

Componitur horum numerorum calculus ex triplici calculo, nimirum ex calculo rationalium coſſicorum, & abſolutorum, atque ex irrationalium abſolutorum.

Si enim incommenſurabiles fuerint, fit additio per +; ſubtractio per —. Si commenſurabiles & eoſdem characteres coſſicos habuerint adduntur & ſubtrahuntur, vt commenſurabiles irrationales abſoluti. Vt ſi √q 8℞ ad √q 18℞ addantur, fient √q 50℞. Si √q 8℞ ſubtrahantur ex √q 50, reſtant √q 8℞.

Multiplicatio, & diuiſio fit etiam, vt in ſuperioribus, ſi eoſdem habeant characteres radicales. Si diuerſos, ante operationem ad eoſdem reuocantur, vt ſupra etiam factum eſt. Exemplum ſi ſint √q 12℞ in √q 8℞ ducenda, fient √q 96q. Si 6℞ in √q 18q, fient √q 648ce. Si √q 96q ſint per √q 8℞ diuidenda, prouenient √q 12℞. Si √q 648ce per √q 18q, prouenient √q 36℞ hoc eſt 6℞.

Si characteres radicales ſint diuerſi reducuntur prius ad eoſdem. Vt ſi ſint √q 8℞ per √ce 16℞ multiplicanda, reducantur hoc modo.

Numeri cum characteribus coſſicis ponuntur ſupra, characteres radicales infra. Deinde fit multiplicatio per crucem, iuxta characteres per crucem re-

8℞ 16℞

q ce

√qce 256q + √qce 512ce

spondentes. Vt quia 8℞ respondet per crucem characterce, ducenda sunt 8℞ ad cubum. 16℞ verò propter characterem q, per crucem respondentem, ad quadratum. Deinde vtrique producto addendus vterque character radicalis. Cossicus vero mutatur, vt supra de multiplicatione cossicorum est dictum. Operatione hoc modo absoluta, proueniunt √qce256q + √qce512ce; quibus in se ductis producuntur √qce 131072ß. Quod si √qce131072ß per √qce256q sint diuidenda, prouenient √qce512ce.

Capvt II.

DE VSV ET PRAXI NVmerorum irrationalium cossicorum.

Propositio I.

EST QVADRATVM, cuius latus, & diametrus simul faciunt 10. Quæro quantum sit latus, quanta diametrus?

Pono latus 1℞: Ergo erit diametrus 10 — 1℞. Et quia per 47 primi quadratum diametri est duplum quadrati lateris, estque quadratum lateris 1q; quadratum diametri 100 — 20℞ + 1q, erunt hæc 2q, his 100 — 20℞ + 1q æqualia; & facta reductione hoc 1q, his

100

100 — 20ꝝ. Semissis numeri radicum est 10, eius quadratum 100, additum absoluto 100 facit 200, cui si addatur semissis numeri radicum, erit latus √q 200 — 10, quod ex 10 subtractum, relinquit diametrum 20 — √q 200.

Propositio II.

Est quadratum, cuius latus ductum in differentiam lateris, & diametri, producit 10, quæro latus, & diametrum.

Pono latus 1ꝝ, per quod si diuidantur 10, prodit differentia lateris, & diametri $\frac{10}{1\text{ꝝ}}$, cui si addatur 1ꝝ prodit diametrus $\frac{10}{1\text{ꝝ}}+1\text{ꝝ}$, siue (particulis ad eundem denominationem ductis) $\frac{10+1q}{1\text{ꝝ}}$, huius quadratum $\frac{100+20q+1qq}{1q}$, cum quadrati lateris sit duplum, erit inter 2q, & $\frac{100+20q+1qq}{1q}$ æqualitas. Quæ si ad eandem denominationem reducantur, & communis denominator tollatur, erit etiam inter 2qq, & 100 + 20q + 1qq æqualitas, & reductione facta, inter 1qq, & 100 + 20q. Diuisis ergo 100 + 20q per 1qq, proueniunt 100 + 20q. Semissis numeri radicum est 10, eius quadratum 100 additum absoluto facit 200; cuius radici √q 200 si addatur semissis numeri radicum, conflantur √q 200 + 10, quadratum lateris: ergo quadratum diametri est √q 800 + 20; adeoque diametrus √q (√q 800 + 20,) & latus √q (√q 200 + 10.)

Subtractum latus ex diametro relinquit √q(√q800 +20) — √q(√q200+10) Ducto iam latere √q(√q200 +10,) in √q(√q800+20) — √q(√q200+10,) producuntur 10. Quæ multiplicatio fit hoc modo.

Ex √q(√q200+10) in — √q(√q200+10) fit quadratum lateris, tollitur enim dũtaxat characterante parenthesin, & propter diuersa signa, ponitur signum hoc —.

√q(√q800+20) — √q(√q200+10)
√q(√q200+10) + √q(√q200+10)
— √q 200+10

Ductis vero √q(√q800+20) in √q(√q200+10) producuntur √q(√q160000+√q80000+√q89000+200;) siue √q(√q160000+320000+200,) & radice ipsius √q160000, addita ad 200, fit hoc binomium (600+√q320000) cuius binomij radix est 20+√200: vnde si tollam — √q200+10, nempe quadratum lateris (√q√q200+10,) restant 10.

PROPOSITIO III.

Diuidatur numerus 100 in duas partes, quæ in se ductæ progignant 1000.

Pono primam partem 1℞: erit igitur altera 100—1℞. hæ partes in se ductæ faciunt 100℞—1q, quæ sunt his 1000 æqualia: & facta reductione hoc 1q, his 100℞—1000. Si ex quadrato semissis numeri radicum, nempe ex 2500 subtrahatur absolutus, restant 1500. Cuius numeri radix quadrata √q1500, si addatur, & subtrahatur

hatur semissi numeri radicum, exurgunt partes, maior $50+\surd q1500$; minor $50-\surd q1500$. Hæ partes additæ faciunt 100. In se vero ductæ procreant 1000.

PROPOSITIO IV.

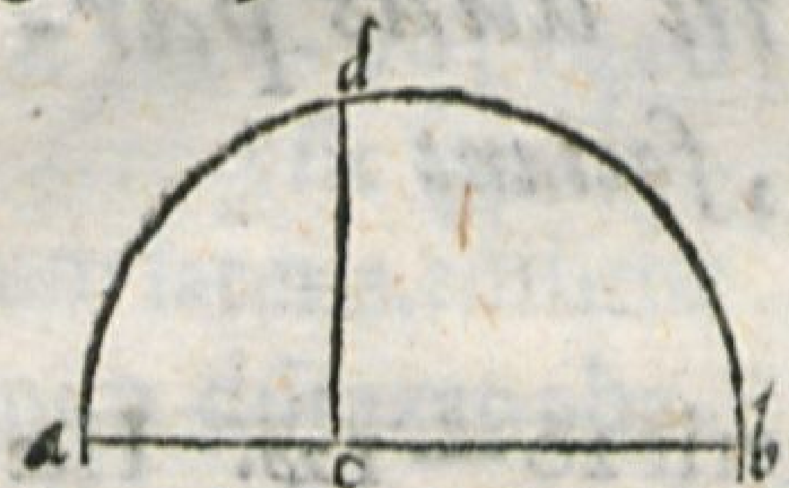
Diuidatur numerus 20 in duas partes, vt partes in se ductæ, faciant $52+\surd q2048$.

Esto pars prima 1℞: igitur altera erit 20 — 1℞. Hæ partes in se ductæ faciant 20℞ — 1q, æqualia his $52+\surd q2048$. Facta reductione erit hoc 1q, his 20℞ — 52 — $\surd q2048$ æquale. Ex quo numero radix sic extrahitur. Subtraho ex quadrato semissis numeri radicum, nempe ex 100, absolutum $-52-\surd q2048$, & restant $48-\surd q2048$, huius numeri radix est $\surd 32-4$. Nam si quadratum minoris particulæ ex quadrato maioris subtrahatur, restant 256, cuius radix quadrata, si addatur, & subtrahatur maiori particulæ, fient 64 — 32: horum dimidia sunt 32 – 16, radices $\surd q32-4$. Quæ si subtrahantur ex semisse numeri radicum, nempe ex 10, restabunt $14-\surd q32$; si eidem addantur, fient $6+\surd q32$. Hæ igitur duæ partes cum in se ductæ faciant $52+\surd q2048$; additæ, conflant 20, bene operati sumus.

PROPOSITIO V.

Est circulus, cuius diametrus est 20 partium, quæ vero ex peripheria in diametrum demittitur est $\surd q(76-\surd q320)$ quæro quæ sint partes diametri à perpendiculari factæ?

Esto circulus a d b, diametrus a b, perpendicularis ex d in diametrum demissa d c: quæro quantæ sint a c, c b? Pono a c esse 1 ℞: erit igitur c b 20 — 1 ℞. Et quia quod fit ex a c in c b æquale est quadrato ipsius c d per 13 sexti; erit inter 20 ℞ — 1 q, & 76 — √q 320 æqualitas (quadratur enim, √q (76 — √q 320) si prior character auferatur.) Ergo reductione facta, erit quoque æqualitas inter 1 q, & 20 ℞ — 76 + √q 320. Ex numero ergo 20 ℞ — 76 + √q 320 sic educitur radix quadrata. Semissis numeri radicum est 10, eius quadratum 100; ex quo si subtrahantur — 76 + √q 320, restant 24 + √q 320. Ex hoc binomio educitur radix hoc modo. Quadrata particularum sunt 576. 320; differentia 256, cuius radix quadrata 16 addita, & subtracta maiori nomini cōflat 40, relinquit 8. semisses sunt 20 & 4, eorum radices √q 20 + 2; quæ si ad semissem numeri radicum, nempe ad 10 addantur, fiunt 12 + √q 20, pars maior, quæ si subtrahatur ex 20, restat 8 — √q 20 pars minor.

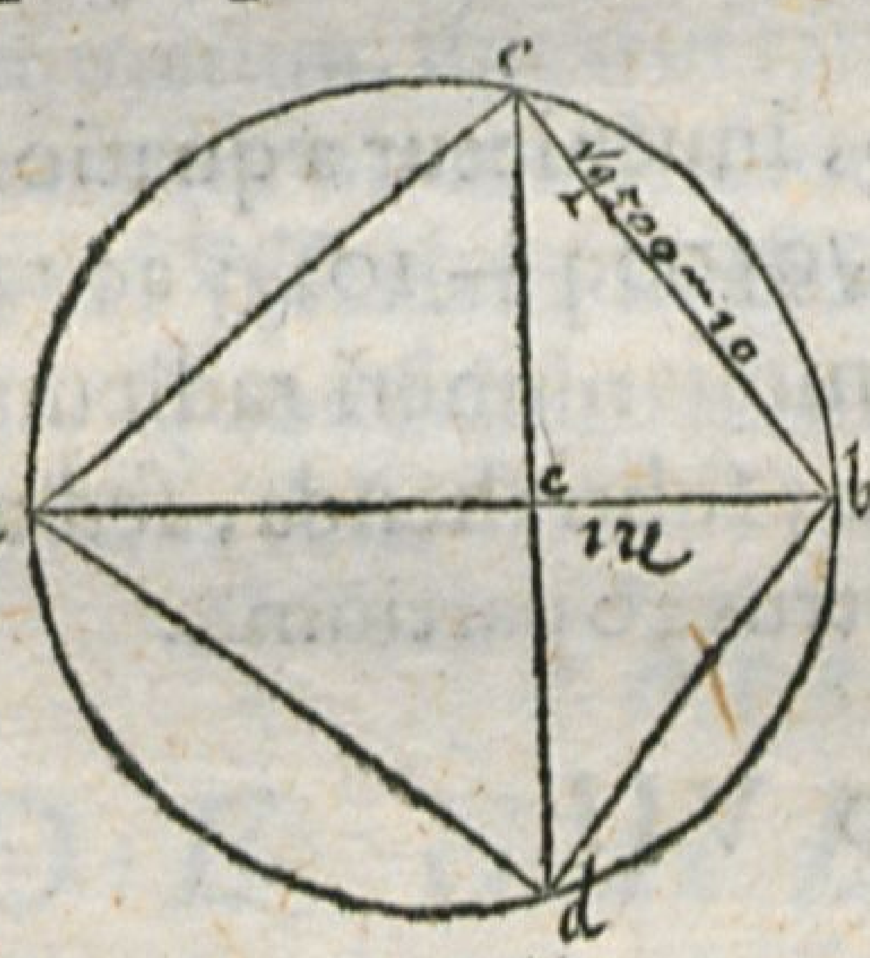


Propositio VI.

EST CIRCVLVS, CVIVS diametrus linea perpendiculari proportionaliter est secta, & vna minorum chordarum est √q500 — 10; quæritur quanta sit diametrus, & reliquæ lineæ.

Sit chorda b c √q500 — 10 partium, & quærantur a e, e b, a b, c a, c e. Quia a b in e proportionaliter est secta, erit,

erit, vt a b ad a e; ita a c a d e b; ſed quoq; eſt, vt a b ad b c; ita b e ad b e, quod triangula a c b, b c e ſint æquiangula per 8 ſexti: ergo a e, b c ſunt æquales. Quia vero b c ponitur √q500 — 10; erit & a e totidem partium. Ponatur e b 1℞. Cum itaq; e c inter a e, e b ſit media proportionalis, erit ipſius quadratum æquale rectangulo ipſis a e, e b contento. Item cum triangulum b c e ſit rectangulũ, erit quoq; quadratum ipſius e c æquale quadrato ipſius b c, minus quadrato ipſius e b:



ergo hoc √q500q — 10℞, huic 600 — √q200000 — 1q eſt æquale, ac facta reductione hæc 600 — √q200000 — √q500q — 10℞. huic 1q. Extrahenda iam eſt radix ex hoc numero 600 — √q200000 — √q500q — 10℞, cuius membrum hoc 600 — √q200000 eſt numerus abſolutus; hoc, — √q500q — 10℞, numerus radicum, cuius ſemiſſis eſt — √q125 — 5. Ad ſemiſſis quadratum, quod eſt + 150 — √q12500, additus abſolutus, conflat 750 — √q312500.

Additur autem abſolutus cum primarium ſignum ſit +, licet ſecundarium ſit —. Antequam autem ex hoc reſiduo, 750 — √q312500, ſubtrahamus ſemiſſem numeri radicum extrahenda prius eſt ex illo radix quadrata. Differentia igitur quadratorum eſt 250000, eius radix 500 addita, & ſubtracta maiori nomini, conflat 1250: relinquit 250. Semiſſes ſunt 625, 125. Radices ſemiſſium 25, √q125, quæ copulatæ ſigno —, ſic habẽt

25—√q125. Vnde si subtrahatur semissis numeri radicum, scilicet √q125—5, restant 30—√q500, pars minor e b. Cum ergo maior sit √q500—10; erit tota a b, 20. E c √q (√q800000—800.) Si enim quadratum ipsius b e, quod est 1400—√q1800000 ex quadrato ipsius b c, quod est, 600—√q200000 tollatur, relinquetur quadratum ipsius e c, quod est √q800000—800. Additis vero quadratis ipsarum a e, e c conflatur quadratum ipsius a c √q200000—200: ergo ipsa a c erit √q(√q200000—200.)

Si ponatur diametrus a b 1℞, inuenietur æquatio inter 1 q, & 600—√q200000+√q500q—10℞; ac tandem extractis radicibus, erit semissis numeri radicum √q125—5, non ex 25—√q125 subtrahenda, sed addenda: quo facto exurgit diametrus 20 partium.

PROPOSITIO VII.

Est triangulum rectangulum, cuius basis est 10—√q28 partium, summa reliquorum laterum 26+√q28: quæritur quantum sit quodlibet reliquorum.

Esto triangulum a b c, cuius basis b c sit 10—√q28: summa reliquorum 26+√q28. Pono a c, quod angulo recto opponitur, esse 1℞: erit igitur a b 26+√q28—1℞. Et quia quadratum lateris A C est æquale, laterum A B, B C quadratis. Et est quadratum ipsius A C 1 q: quadratũ ipsius A B 704+√q75712—√q112q—52℞+1q:

1q: ipsius BC, 128 − √q11200. Summa vtriusq; AB, BC, 832+√q28672 − √q112q − 522℮ + 1q, quæ est æqualis ipsi 1q. Facta reductione, erunt hæc 832 + √q 28672, his 522℮ + √q112q æqualia. Diuisis ergo 832 +√q28672 per 522℮ + √112q, proueniūt 16, AC, quod ponebatur 1 2℮. Fit autem diuisio hoc modo. Iuxta illa, quæ cap. 1. art. 4. lib. 3. de diuisione dicta sunt, mutetur signum + posterioris particulæ diuisoris in −, hoc modo 522℮ − √q112q, atque in diuisorē hoc modo mutatum, ducatur tam diuisor, quam diuidendus, & inuenietur nouus diuisor 2592; & nouus diuidendus 41472. Facta iam diuisione, prouenit quotus 16, latus AC. Quod si subtrahatur ex 26+√q28, restant 10+√q 28, latus AB.

APPENDIX.

DE CALCVLO Astronomico.

CAlculus astronomicus comprehendit motus, & tempora: vtraq; reperiuntur in orbibus cælestibus, quæritur enim, aut quanto tempore datus aliquis motus absoluatur, aut quantus motus in dato aliquo tempore peragatur. In motu considerantur signa, gradus, minuta, secunda, tertia, quarta &c. Signum, aut est physicum, aut commune. Physicum, est sexta pars circuli, continetque gradus 60 (nam totus circulus apud astronomos diuiditur

tur in 360 partes æquales, quas gradus appellant) Commune est duodecima pars circuli, continetq; gradus 30. Gradus est trecentesima sexagesima pars circuli. Habet itaque circulus 12 signa communia: signum commune 30 gradus: gradus 60 minuta: minutum 60 secunda; secundum 60 tertia &c. gradus signãtur hoc signo °. Minuta hoc ′. secunda hoc ″. tertia hoc ‴. &c. Alij minuta vocant scrupula prima, secunda scrupula secunda, tertia scrupula tertia &c.

Tempus diuiditur in annos, menses, dies, horas, minuta, secunda &c. Annus aut est astronomicus, aut ciuilis. Astronnomicus secundum varios est varius. Alphonsini putant esse 365 dierum, 5 horarum, 49 minutorum, 16 secundorum. Ciuilis est duplex, communis & bissextus. Communis habet dies 365, bissextus 366. Mensis est dierum 31, aut 30, aut 28, aut etiam 29. Dies habet horas 24, hora minuta 60, minutum 60 secunda, &c.

Habent præterea tam gradus, quam anni, & dies sexagenas. Sexagena diuiditur in primam, secundam, tertiam &c.

Exem-

Exempli causa 776000 gradus habent 3 sexagenas tertias, 35 secundas, 33 primas, & præterea 20 gradus. Diuisis enim 776000 per 60, proueniunt 12933 sexagenæ primæ, restant 20 gradus. Diuisis verò 12933 per 60, proueniunt 215 sexagenæ secundæ, restant 33 sexagenæ primæ. Denique diuisis 215 per 60, proueniunt 3 sexagenæ terrtiæ, restant 35 sexagenæ secundæ.

Item 590173 dies habent sexagenas tertias 2, secundas 43, primas 46, dies 13. Nam diuisis 590173 per 60, proueniunt 9836 sexagenæ primæ, restant dies 13. Diuisis verò 9836 per 60, proueniunt sexagenæ secundæ 163, restant primæ 56. Diuisis denique 163 per 60, proueniunt sexagenæ tertiæ 2, restant secundæ 43. Anni 1616 habent sexagenas primas 26, dies 56. Diuisis enim 1616 per 60, proueniunt 26, restant 56 anni.

DE ADDITIONE ET *subtractione.*

In additione, & subtractione primo suppone sibi mutuo numeros eiusdem speciei, vt ſigna ſignis, gradus, gradibus, dies diebus, minuta minutis, ſecunda ſecundis &c.

Secundò, incipe à minimis, quæ verſus dextram poni ſolent, & in additione ſummam factam, ſi ſcrupula fuerint, diuide per 60, quotum ſerua pro ſequente operatione, reſiduum pone infra lineam. Si fuerint gradus, diuide ſummam per 30. ſi ſigna per 12, & quotum tanquam inutilem, omnino abiice, niſi in certis caſibus fuerit memoria conſeruãdus: ſi horæ per 24; ſi dies per 365, vt proueniant anni communes. Exemplum. volo addere, quæ in hac formula vides. Primo addo ſecunda, & conflo 101, quibus per 60 diuiſis, prouenit 1, reſtant 41, quæ pono ſub ſecundis. Et 1 pro ſequente operatione reſeruo.

S.	°.	'.	''.
9.	23.	42.	51
3.	17.	31.	46
7.	9.	58.	4
8.	21.	12.	41

Deinde addo minuta, iiſque prius ſeruatum addo, & conflo 132, quibus per 60 diuiſis, proueniunt 2, reſtant 12. pono ergo 12 ſub minutis, reſeruo 2. Tertio addo gradus, & 2 prius ſeruata, efficioque 51: quibus per 30 diuiſis, quod vnum ſignum commune 30 gradus habeat, prouenit 1, reſtant 21. Igitur 21 ſubſcribo gradibus, 1 reſeruo. Denique addo ſigna,

& pri-

& prius ſeruatum, & conflo 20; vnde reiecto integro circulo, ſeu 12 ſignis, reſtant 8, quæ ſignis ſuppono.

Nota ſi, vbi ſunt gradus, eſſent dies, ſummam fore per 24 diuidendam.

In ſubtractione, quando inferior eſt maior ſuperiore, debet ad ſuperiorem ex proximis verſus ſiniſtram poſitis aſſumi vnitas, quæ valet aut 60, aut 30, aut 24. Sexaginta ſi addantur ſcrupula, aut gradus ſignorum phyſicorum. 30; ſi addantur gradus ſignorum communium. 24 ſi horæ. Quæ vnitas cum ad ſigna aſſumitur, valet 12, aut 6, prout ſignum fuerit commune, aut phyſicum.

Primum exemplum. Sint 23 D. 8 H. 54′. 47″. ex 28 D. 4 H. 35′. 15″ ſubtrahenda. Quia ſecunda inferiora ſuperant ſuperiora, addo ſuperioribus 60, vt fiant 75, ex quibus ſi ſubtraham 47, reſtant 28. Rurſus quia 54 excedunt 34 (34 inquam, quia ex 35 vnum ablatum antea fuit) addo 60, vt fiant 94, vnde ſubtractis 54, reſtant 40. Iterum, quia 8 H excedunt 3, (non 4, quod vna antea ſublata ſit) addo 24, vt fiant 27: vnde ſubtractis 8 H, reſtant 19 H.

D.	H.	′	″
28.	4.	35.	15
23.	8.	54.	47
4.	19.	40.	28

Denique ſublatis 23 diebus, ex 27 D, reſtant 4 D.

Secundum exemplum. Sint 9 S. 18°. $22'$. $32''$, ex 3 S. 24°. $47'$. $53''$ ſubtrahenda. Subtractis ſecundis ex ſecundis reſtant $21''$. Minutis ex minutis, $25'$. gradibus ex gradibus, 6°. Vt verò ſubtrahas 9 ſigna ex 3, adde 12 ab 3, vt fiant 15, vnde ſubtractis 9, reſtant 6 ſigna.

S.	°	′	″
3.	24.	47.	53
9.	18.	22.	23
6.	6.	25.	21

DE MVLTIPLICAtione, & diuiſione.

Circa Multiplicationem, & Diuiſionem nota primo gradus pro nota habere hanc circularem figurã $^{\circ}$. Minuta hanc $'$. Secunda hanc $''$. Tertia hanc $'''$. Quarta hanc $''''$. Quinta hãc ^{v}. &c. vt ſupra monui. Sexagenas primas hanc $^{`}$. Sexagenas ſecundas hanc $^{``}$. Tertias hanc $^{```}$. &c.

Nota ſecundo, in Multiplicatione, ſi notæ vtriuſq; multiplicantis eiuſdem ſint ſpeciei, hoc eſt, ſi vterq; multiplicans habeat notas tantum tales $''$, $'''$, ^{v}, &c: aut tantum tales $^{`}$, $^{``}$, $^{```}$. &c. eas eſſe addendas: ſi diuerſas, minorem ex maiore ſubtrahendam, vt habeatur producti nota.

Ter-

Tertiò, qnando dies in motum diurnum, aut anni in annum ducuntur, habere tam dies, quam annos notam hanc $^{\circ}$.

Quartò, initium à minimis faciendum; productum diuidendum per 60. Quotum operationi sequenti reseruandum. Ac demum residuum infra lineam ponendum.

Exemplum. Volo motum diurnum solis, qui est $\overset{\prime}{59}.\ \overset{\prime\prime}{8}.\ \overset{\prime\prime\prime}{11}.\ \overset{\prime\prime\prime\prime}{22}.\ \overset{v}{16}.\ \overset{vi}{11}.\ \overset{vii}{15}$. ducere in 365 dies; siue in 6 sexagenas primas dierum, & 5 dies, vt habeatur motus annuus. Sic igitur progredior.

$$
\begin{array}{r}
\overset{\prime}{59}.\ \overset{\prime\prime}{8}.\ \overset{\prime\prime\prime}{11}.\ \overset{\prime\prime\prime\prime}{22}.\ \overset{v}{16}.\ \overset{vi}{11}.\ \overset{vii}{15} \\
6 \\
\hline
\grave{5}.\ \overset{\circ}{54}.\ 49.\ 8.\ 13.\ 37.\ 7.\ 30. \\
4.\ 55.\ 40.\ 56.\ 51.\ 20.\ 56.\ 15 \\
\hline
5.\ 59\ 44.\ 49.\ 10.\ 28.\ 28.\ 26.\ 15
\end{array}
$$

Duco 6 sexagenas in $\overset{vii}{15}$, & produco $\overset{vi}{90}$. quibus per 60. diuisis, prouenit $\overset{v}{1}$, restant $\overset{vi}{30}$. Pono igitur $\overset{vi}{30}$ infra sexta, retineo $\overset{v}{1}$ pro sequente operatione. Secundo duco 6 in $\overset{vi}{11}$, & produco $\overset{v}{66}$, addo $\overset{v}{1}$ prius retentum, & efficio 67, quibus per 60 diuisis, prouenit $\overset{\prime\prime\prime\prime}{1}$, restant $\overset{v}{7}$. Positis igitur 7 infra quinta; reseruato $\overset{\prime\prime\prime\prime}{1}$, duco in $\overset{v}{16}$, & produco $\overset{\prime\prime\prime\prime}{96}$, addo $\overset{\prime\prime\prime\prime}{1}$ prius retentum, & conflo $\overset{\prime\prime\prime\prime}{97}$; quibus per 60 diuisis, prouenit $\overset{\prime\prime\prime\prime}{1}$; restant $\overset{\prime\prime\prime\prime}{37}$, &c. Ducto eodem modo motu diurno in dies 5, produco 4°. 55′. 40″. 56‴. 51⁗. 20^{v}. 56^{vi}. 15^{vii}, quæ si addantur prioribus, prouenit motus solis annuus, vt in formula apparet.

Ratio autem, cur ductis 6ˋ sexagenis in 15^{vii} proueniant 90^{vi} est, quod subtracta nota hac ˋ ex his ^{vii} restet nota hæc ^{vi}.

Habito motu annuo habebitur motus 60 annorum communium, si notæ scrupulorum vnitate minuantur, sexagenarum augeantur, hoc modo 5ˋˋ. 59ˋ. 44°. 49′. 10″. 28‴. 28⁗. 26^{v}. 15^{vi}. cui motui si addatur motus 15 dierum, prodibit motus 60 annorum nostrorum. Motus 15 dierum est 14°. 47′. 2″. 50‴. 34⁗. 2^{v}. 48^{vi}. 45^{vii}. hic motus additus motui 60 annorum communium conflat motum annorum 60 nostrorum siue Iulianorum hunc 5ˋˋ. 59ˋ. 59°. 36′. 13″. 19‴. 2⁗. 29^{v}. 3^{vi}. 45^{vii}. Si rursus notæ scrupulorum vnitate minuantur, sexagenarum augeantur, exurget motus 3600 annorum Iulianorum, hic 5ˋˋˋ. 59ˋˋ. 59ˋ. 36°. 13′. 19″. 2‴. 29⁗. 3^{v}. 45^{vi}. ex quo si motus 27 dierum tollatur, relinquitur motus 3600 annorum Gregorianorum, hic 5ˋˋˋ. 59ˋˋ. 59ˋ. 9°. 36′. 37″. 55‴. 27⁗. 46^{v}. 41^{vi}. 15^{vii}. Motus dierum 27 est. 26°. 36′. 41″. 7‴. 1⁗. 17^{v}. 3^{vi}. 45^{vii}. Tolli autem debet ex motu 3600 annorum Iulianorum motus 27 dierum,

quod

quod 3600 anni Iuliani, siue veteris Calendarij excedant 3600 annos Gregorianos, siue noui Calendarij, 27 diebus. Centum annorum motum habebis, si motum 60 annorum Iulianorum, motus item 40 annorum communium, & 10 dierum coniungas, vt hic apparet.

``	`	°	'	''	'''	''''	v	vi	vii	
5	59	59	36	13	19	2	29	3	45	60. an.
3	59	49	52	46	58	58	57	30	0	40. an.
		9	51	21	53	42	41	52	30	10. d.
9	59	59	20	22	11	44	8	26	15	

Ideo autem motibus annorum 60 Iulianorum, & 40 communium addi debet motus 10 dierum, quod 40 anni communes habeant 10 dies intercalares. Si motum 100 annorum duplices, habebis motum 200 annorum: si motus 100, & 200 annorum coniungas, habebis motum 300 annorum &c. Eodem modo mensium, & annorum duorum, trium, quatuor &c. motus colliges.

De Diuisione, quæ in hæc pragmatia exigui vsus est, has speculationes accipe. Primo cum gradus per gradus diuiduntur proueniunt gradus. Secundò, cum diuiduntur gradus, siue °. per '.''.'''. &c. proueniunt \`.\`\`.\`\`\`. &c. Et contra cum °, siue gradus per ` . `` . ``` . &c. diuiduntur, proueniunt ′ . ″ . ‴ . &c. Tertiò, cum diuiduntur ′ . ″ . ‴ &c. per gradus, proueniunt ′ . ″ . ‴ . &c. cum verò ` . `` . ``` &c. per gradus diuiduntur, proueniunt ` . `` . ``` . &c. Quartò, cum diuisor, & diuidendus habuerint notas eiusdem speciei, superaueritque nota diuidendi notã diuisoris, subtrahitur minor ex maiore, eritque residuum nota quoti. Si contra nota Diuisoris superauerit notam diuidendi, fit eadem subtractio notarum: sed ex votis ′ . ″ . ‴ . fiunt ` . `` . ``` . & ex ` . `` . ``` . fiunt ′ . ″ . ‴ .

Quintò. Cum ′ . ″ . ‴ . diuiduntur per ` . `` . ``` : aut ` . `` . ``` . per ′ . ″ . ‴ . fit additio notarum, & quotus retinet notam diuidendi. Vt si diuidantur ″ per `, proueniunt ‴. Si ``` per ″ proueniunt v` . Sed hæc de calculo astronomico, & vniuersa Arithmetica ad honorẽ DEI ter Opt. Max. Et gloriosæ Virg. Matris dicta sint.

APPENDIX SECVNDA.

DE DIVINATIONIBVS *vulgaribus.*

Quia intelligo quosdam huiusmodi diuinationibus delectari, placuit in eorum gratiam vnam, aut alteram appendere.

DIVI-

DIVINATIO I.

QVOMODO NVMErus, quem quis animo concepit, inuestigetur.

Iube numerum conceptum triplicari: triplicatum si par sit dimidiari: si impar addi vnitatē, postea dimidiari. Dimidiatum iube rursus triplicari: triplicatum si par sit dimidiari: si impar, addi vnitatem; & postea dimidiari. Postremum dimidiatū iube diuidi per 9, & quotum tibi dici, quem duc in 4, & producto adde 1. si primæ triplicationi addita est vnitas: 2, si secundæ, proditque numerus quem alter animo concepit.

Exemplum. Conceperit 11: quæ triplicato faciunt 33; qui numerus, quia est impar, addatur ei vnitas, vt fiant 34. Dimidium est 17, quod triplicatum facit 51; sed quia impar est, addatur vnitas, vt fiant 52. dimidium 26 diuisum per 9 reddit 2, quæ in 4 ducta faciunt 8; quibus, quod vtrique triplicationi addita sit vnitas, iunge 3, & conficies 11, numerum quem alter animo concepit.

Aliud. Conceperit quis 10: triplū est 30. Dimidium 15; quod triplicatum facit 45; addatur, quia impar, vnitas, vt fiant 46. Cuius dimidium diuiſum per 9 reddit 2: quæ in 4 ducta faciunt 8: quibus; quia ſecundæ triplicationi addita eſt vnitas, iunge 2, & fient 10 numerus conceptus.

Aliud. Conceperit quis 17. Triplum eſt 51: cui, quod impar, adde 1. vt fiant 52. Dimidium 26 triplicatum facit 78; huius dimidium 39 diuiſum per 9 reddit 4, quæ in 4 ducta faciunt 16; quibus, quod primæ triplicationi addita ſit vnitas, iunge 1. & prodibunt 17, numerus conceptus.

Aliud. Conceperit quis 20. Triplum eſt 60: dimidium 30; triplum huius 90: dimidium 45, quod diuiſum per 9, reddit, 5, quæ ducta in 4, producunt 20, numerum conceptum.

Secvnda Divinatio.

Res abscondita quomodo inueſtigetur.

Sint aliquot perſonæ, quarum vna in certi digiti certo articulo habeat annulum; potes ſcire, quæ perſona, in quo digito, & articulo annulum habeat. Conſtitue apud te certum perſonarum ordinem, quæ nimirum ſit prima,

quæ

quæ ſecunda, &c. Idem de digitis 10, & 3 articulis facito. Poteſt autem pollex dextræ primus, pollex ſiniſtræ vltimus intelligi, vt & articulus proximus vngui primus proximus radici vltimus. His ſic cõſtitutis, iube à prima perſona verſus vltimã numerari vſq; ad illam, quæ annulũ habet; & numerũ duplicari, duplicato addi 5; hanc ſummã duci in 5; producto addi numerũ articuli, in quo annulus eſt; hanc ſummã duci in 10, producto addi numerũ articuli, in quo annulus eſt: tandẽ ex tota ſumma ſubtrahi 250, ac reliquũ tibi indicari; indicabit enim numerus primus verſus dextram articulũ, ſecundus digitum, tertius perſona, idem, ſi plures quam tres ſint, præſtabunt poſteriores.

Exemplum. Sint 20 perſonæ, habeatque duodecima annulum in digito ſexto, hoc eſt, in auricularis manus ſiniſtræ articulo medio, qui eſt ſecundus. Iube duplicari 12, vt fiant 24, his adde 5, vt conflentur 29: hæc duci in 5, vt fiant 145: his rurſus addi 6, numerum digiti, vt fiant 151: hæc duci in 10, vt producantur 1510; quibus ſi addantur 2, numerus articuli, conflabis 1512: vnde ſi ſubtrahas 250, reſtant 12|6|2: habet ergo 12 perſona in ſexti digiti articulo ſecundo annulum, hoc eſt, in articulo medio digiti auricularis manus ſiniſtræ.

Notabis poſſe duplo perſonarum etiam alium numerum quam 5 addi, vt 1.2.3.4.6. &c. Sed ſi 1 addatur, erunt ex poſtrema ſumma 50 abijcienda: ſi 2, centum: ſi 3 centum quinquaginta: ſi 4 ducenta: ſi 6 trecenta, &c.

TERTIA DIVINATIO.

QVOMODO TRES RES abſconditæ inueſtigentur.

Conſtitue inter tres perſonas, & res abſconditas ordinem, vt quæ perſona ſit prima, quæ ſecunda, quæ tertia. Item, quæ res ſit prima, quæ ſecunda, quæ tertia: ſit A prima, B ſecunda, C tertia. Deinde proijce in menſam, vbi perſonæ ſedent 24 calculos, & da perſonæ primæ 1, ſecundæ 2, tertiæ 3, recedenſque iube, vt quælibet perſona ex tribus rebus abſcondat, quam libuerit, ſic tamen, vt quæ primam abſconderit, accipiat tot calculos, quot antea habebat; quæ ſecundam, duplum prioris; quæ tertiam, quadruplum. Quo facto vide quot calculi in menſa remaneant. Si namque remaneat vnus, accepit prima perſona A, ſecunda B, tertia C. Si duo; accepit prima B, ſecunda A, tertia C. Si 3, accepit prima A, ſecunda C,

tertia

tertia B. Si 5 (neque enim 4 remanere poſſunt) accepit prima B, ſecunda C, tertia A. Si 6, accepit prima C, ſecunda A, tertia B. Si 7, accepit prima C, ſecunda B, tertia A, aſpice hanc tabellam.

1	1	A
	2	B
	3	C
2	1	B
	2	A
	3	C
3	1	A
	2	C
	3	B
5	1	B
	2	C
	3	A
6	1	C
	2	A
	3	B
7	1	C
	2	B
	3	A

Oritur hæc diuinatio eſt rerum cōbinationibus. Poſſunt namque duæ res bis: tres ſexies: quatuor vicies quater: quinq; centies vicies cōbinari. Vt autē ſcias, quot modis quotcūq; res cōbinari poſſint, pone ordine tot numeros, quot ſunt res cōbinandę incipiendo ab vnitate, eosq; ſigillatim in ſe ducito, hoc eſt, primum in ſecūdum, productum in tertiū, & hoc productum in quartū, &c. Vt ſi ſcire velis quot modis ſex res combinari poſſint, pone 6 numeros hoc ordine 1.2.3.4.5.6. Duc 1 in 2, & produces 2; hæc in 3, & produces 6, hæc in 4 & produces 24; hæc in 5, & produces 120; hęc in 6, & produces 720: Poſſunt igitur ſex res, v. g. Sex literæ A, B, C, D, E, F ſeptingenties vicies combinari.

INDEX CAPITVM ET ARTICVLORVM.

LIBER I.

Caput I. pag. I.

Caput II.

Caput III.

Caput IIII.

Caput V.

Liber II. pag. 87.

Caput I.

Art.

Caput II.

Caput III.

LIBER TERTIVS.

Quot

INDEX RERVM PRÆCIPVARVM.

Bino-

Fracto-

Posi-

NB.

NB. Beneuole lector, proportiones superpartientes, quę sunt inter 7. & 5. inter 14 & 10. inter 27 & 17. inter 81 & 51. Item multiplices superpartientes quæ sunt inter 34. & 7. inter 4 & 5. non vt lib. 1. c. 4. a. 2 pag. 56 per incuriam factum est pronunciari; sed prima & secunda dicuntur superbipartientes quintas, tertia & quarta, superdecupartientes decimas septimas; quinta, quadrupla supersextupartiens septimas. Sexta, dupla superquadrupartiens quintas; semper enim excessus maioris super minorem voci superpartiens inseritur, & minor proportionis terminus solitariè ponitur. Vt quia 7. excedit 5. binario, dicitur proportio 7 ad 5 superbipartiens quintas. Cur verò, quæ est inter 14 & 10. vocetur superbipartiens quintas, non verò superquadrupartiens decimas; & quæ est inter 81 & 51. vocetur superdecupartiens decimas septimas, ratio est, quia nec 14 & 10. nec 81 & 51. sunt numeri inter se primi, sed compositi, habentq; cõmunem mensuram, illi quidem hanc 2. hi verò hanc 3. fit vt si per mensuras illas diuidantur, reducantur ad has, 7. 5. & has 27. 17. vnde priores dicuntur habere proportionem superbipartientem quintas; posteriores superdecupartientem decimas septimas.

Proportio quoque hæc $5\frac{3}{8}$ quæ habetur art. 3. pag. 57. dicitur quintupla supertripartiens octauas; hæc $3\frac{3}{7}$ tripla supertripartiens septimas; hæc $7\frac{5}{7}$ septupla superquintupartiens septimas; hæc $4\frac{3}{4}$ quadrupla supertripartiens quartas. Idem iudicium esto de alijs si quæ occurrant.

ERRA-

Emendata sunt

ERRATA SIC CORRIGE.

Pag.75.v.pen.vtcunq;.pag.82.v.20.46.pag.83.v.18.8B,pag.88 v.15.dele alterum 29.pag.92.v.11.—6ce.pag.94.v.6.12ze+5.v.7.3ce+&c.v.17.+48ze+240.pag.105.v.20.possent hæc.pag.106.v.2.secundæ.pag.108.v.27.post ducta adde,faciunt.pag.109.v.11.tollam 6.pag.112.v.2.2$\frac{1}{4}$ze.pag.113.v.7.10—12ze.pag.114.v.12.reliqui.v.17.atq; v.18.restant.v.penult.ducas in 3.v.vlt.dele,in 3.pag.116.v.21.238.p.117 v.16.28ce.pag.118.v.4.22.v.10.202ze—19.v.antepen.9801.pag.119.v.7.12—12ze.v.13.42ze—24.pag.120.v.14.441+19.v.23.$\frac{1}{4}$ v.antepen.radices.pag.121.v.5.13.pag.121.v.8.382.v.26.392ze.pag.123.v.19.pro 16.pone 10.pag.153.v.12.b1.6. *Cætera Grammaticæ & Arithmeticæ vel modicum peritus facilè emendabit.*

FINIS.

HMETICARVM
OR.

S E T
ACTICIS,
CLARISSI-
r.

m genera.

oluti.
ci.
oluti.
ici.

E FRA-
ONOMI-
r.

um, & rerum
r.

J. C. H

A N T Z,
nſcripti.

laum Henricum.

VII.